Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 20 - **Comparaison séries-intégrales.**

Exercice 1 (Un théorème classique)

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante, positive.

1) Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge si et seulement si $\sum f(k)$ converge.

2) Si $\sum f(k)$ diverge, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^{n+1} f(t)\, dt$.

3) Si $\sum f(k)$ converge, montrer que $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ n'est pas forcément équivalent à $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\, dt$. Par contre, si $f(n) = o(R_n)$, alors montrer que c'est vrai.

Exercice 2 (Quelques comparaisons séries-intégrales)

1) Trouver un équivalent de $A_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

2) Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \ln^2 k$.

3) Trouver un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $\alpha > -1$.

Exercice 3 (Différence entre Intégrales et séries)

Donner un exemple de fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telles que
a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ diverge, b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ diverge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge, c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge, f non bornée et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ diverge.

Exercice 4 (Intégration par paquets)

Soit $a \geq 0$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $u_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\, dt$ où x_n est une suite croissante telle que $x_0 = a$ et qui tend vers $+\infty$.

1) Montrer que si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

2) Montrer que la réciproque est fausse.

3) Montrer que si $\sum u_n$ converge et si $v_n = \displaystyle\int_{x_n}^{x_{n+1}} |f(t)|\, dt \to 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ converge. A quel résultat cela vous fait-il penser ?

4) Application 1 : Etude de la divergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^\alpha}\right| dt$ si $\alpha \leq 1$.

5) Application 2 : Montrer que si f est positive et décroissante vers 0 à l'infini, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t) \sin t\, dt$ converge. Connaissez-vous une autre preuve de ce résultat ?

Exercice 5 ("Sommes infinies de Riemann")

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante et telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1) Montrer que f reste positive.

2) Montrer que $\displaystyle h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \to \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ quand h tend vers 0.

Exercice 6 (Aparté sur les séries)

1) Enoncer et démontrer la règle de Raabe-Duhamel.

2) Enoncer et montrer le lien entre la règle de Cauchy et celle de D'Alembert.

Bibliographie : Pommellet (ex 1 et 4, partiellement aussi les autres), Gourdon (ex 6)