Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE3 - 22 - **Lois de Kepler.**

Definition 1. *Le champ de vecteurs $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, est dit conservatif s'il existe $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tel que*

$$F(y) = -\nabla V(y).$$

Une telle fonction V est appelée un potentiel. Le potentiel est unique à une constante additive près.

Definition 2. *Un champ de vecteurs $F : \Omega \to \mathbb{R}^d$, avec Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, est dit central si pour tout y, $F(y)$ est colinéaire à y, c'est-à-dire s'il existe $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que*

$$F(y) = \lambda(y)y$$

pour tout $y \in \Omega$.

Exercice 1 (Champ de vecteur conservatif et central)

Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ avec $d \in \mathbb{N}^*$, montrer que $F(x) = -\mu \dfrac{x}{\|x\|^3}$ est central et conservatif avec le potentiel $V(x) = -\mu \dfrac{1}{\|x\|}$ où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne.

Exercice 2 (Mouvement plan)

Nous allons montrer que la trajectoire d'un point matériel soumis à un champ de vecteurs central en dimension 3 est contenue dans un plan fixe.

Soit F un champ de vecteurs central de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Soient $y_0, v_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et y la solution maximale de

$$y'' = F(y), \qquad y(t_0) = y_0,\, y'(t_0) = v_0. \tag{1}$$

Montrer que pour tout t dans l'intervalle de définition de y,

$$y(t) \text{ appartient à } \mathrm{Vect}(y_0, v_0) = \{ay_0 + bv_0\,;\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on montrera que le produit vectoriel $y \wedge y'$ est constant au cours du mouvement. (C'est ce que l'on appelle l'*intégrale première du moment cinétique.*)

Ainsi dans le cas où y_0 et v_0 sont colinéaires, le mouvement reste sur la droite passant par 0 et dirigée par ce vecteur, et dans le cas où y_0 et v_0 ne sont pas colinéaires, y_0 et v_0 forment un plan et le mouvement reste dans ce plan.

Exercice 3 (Loi des aires)

Nous allons montrer que la trajectoire d'un point matériel soumis à un champ de force central vérifie la loi des aires, à savoir que le segment qui relie le point matériel à 0 décrit une aire proportionnelle au temps.

Soit F un champ de vecteurs central de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

1) En se plaçant en cordonnées polaires (r, θ) dans le plan de la trajectoire, montrer que le segment qui relie le point matériel à 0 décrit une aire proportionnelle au temps.

2) Montrer que la solution maximale de (1) pour $y_0, v_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vérifie

$$r^2\theta' = k, \tag{2}$$

avec k la constante de l'intégrale première du moment cinétique.

Exercice 4 (Passage du problème à deux corps au problème à un corps)

Si on note p et q les centres des corps de masse M et m dans $\mathbb{R}^3$, la force exercée par le corps de masse M sur le corps de masse m est $\mathcal{F}(q - p)$ avec

$$\mathcal{F}(y) = -GmM \frac{y}{\|y\|^3}.$$

Prenant pour p le centre du Soleil de masse M et q le centre de la Terre de masse m, le problème à deux corps Terre-Soleil correspond à l'étude du système de deux équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{rcl} mq'' & = & \mathcal{F}(q-p), \\ Mp'' & = & -\mathcal{F}(q-p). \end{array} \right. \tag{3}$$

Notons w le centre de gravité commun aux deux corps et faisons la translation du centre du repère en w en posant $\tilde{p} = p - w$ et $\tilde{q} = q - w$.

Déterminer les équations différentielles vérifiées par $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$.

Exercice 5 ()

1) Justifier pouquoi on ramène le problème précédent à l'étude dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de l'équation différentielle

$$y'' = F(y), \text{ avec } F(y) = -\mu \frac{y}{\|y\|^3},$$

où $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

2) En utilisant les coordonnées polaires

$$y = ru, \qquad \text{avec } r = \|y\| \text{ et } u = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix},$$

montrer que l'équation différentielle devient

$$y'' = -\mu \frac{1}{r^2} u.$$

Posons $v = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. Montrer que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{\mu} y' - v\right) = 0.$$

Ainsi $\dfrac{k}{\mu} y' - v$ est un vecteur constant, on le note $H = \frac{k}{\mu} y' - v$.

3) Montrer que

$$\frac{k}{\mu}(r'u + r\theta' v) = H + v,$$

puis que

$$\frac{k^2}{\mu} r = \langle H, v \rangle + 1.$$

4) Notons $H = e \begin{pmatrix} \cos\theta_H \\ \sin\theta_H \end{pmatrix}$ avec $e = \|H\|$. Montrer que

$$r = \frac{k^2/\mu}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Référence : Berthelin