Exercice 12 (Intégrale à paramètre de fonctions holomorphes)

1) Montrer que si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(t,z) \mapsto f(t,z)$ continue sur $[a,b] \times \Omega$ holomorphe par rapport z pour tout t, alors $z \mapsto \int_a^b f(t,z)\,dt$ est holomorphe sur Ω.

2) En utilisant le Théorème de Weierstrass, quelle hypothèse faut-il rajouter pour considérer le cas où $b = +\infty$.

Remarque 4 : Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on a des résultats du style : Soit (X, τ, μ) un espace mesuré, Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : X \times \Omega \to \mathbb{C}$. On suppose que *i)* $\forall z \in \Omega$, $t \mapsto f(t,z) \in L^1_\mu(X)$, *ii)* p.p. $t \in X$, $z \mapsto f(t,z)$ est holomorphe sur Ω, *iii)* pour tout compact K de Ω, il existe $g \in L^1_\mu(X)$ tel que $|f(t,z)| \leq g(t)$, p.p. $t \in X$, $\forall z \in K$, alors $F(z) = \int_X f(t,z)\,d\mu(t)$ est holomorphe sur Ω et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(t,z)\,d\mu(t)$.

Zéros isolés, Prolongement analytique et Principe du maximum

Le prolongement analytique permet le passage de certaines propriétés locales au global. Ceci permet par exemple d'étendre certains résultats de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Théorème 8, Principe des zéros isolés : Soit f holomorphe non constante sur un ouvert connexe Ω. Alors les zéros de f forment un ensemble de points isolés.

Théorème 9, Prolongement analytique : Soient f, g holomorphes non constantes sur un ouvert connexe Ω. Si $\{a\,;\, f(a) = g(a)\}$ possède un point d'accumulation dans Ω alors $f = g$ dans Ω.

Théorème 10, Principe du maximum : Soit f holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ possède un maximum local dans Ω, alors f est constante.

Exercice 13 [Cours] (Zéros isolés et prolongement analytique)

1) Montrer le principe des zéros isolés en faisant un développement limité au voisinage d'un éventuel point d'accumulation.

2) Montrer le théorème du prolongement analytique.

3) Montrer le principe du maximum en utilisant la question 1 de l'exercice 9.

Exercice 14 (Extension de relations)

1) En partant du fait que $e^{x+y} = e^x e^y$ sur $\mathbb{R}$, étendre de façon très simple cette relation sur $\mathbb{C}$.

2) Fonction Eta de Dedekind : Soit $\eta(z) = e^{i\pi z/12} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi nz})$. On verra dans une feuille ultérieure comment montrer que η est holomorphe sur $P = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Im} z > 0\}$. On définit $\sqrt{\ }$ sur P comme l'application holomorphe réciproque de $z \mapsto z^2$ de P dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire par $\sqrt{re^{i\theta}} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ pour $r > 0$ et $0 < \theta < 2\pi$. Montrer que pour tout $z \in P$, $\eta(z+1) = e^{i\pi/12}\eta(z)$ et $\eta(-1/z) = e^{-i\pi/4}\sqrt{z}\eta(z)$. (Pour la seconde formule, on commencera par montrer la formule pour $z = ix$ avec $x > 0$ et posant $F(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1 - e^{-2\pi nz})^{-1}$ pour $x > 0$, on admettra la relation fonctionelle $e^{\pi x/12}F(x) = \sqrt{x}e^{\pi/(12x)}F(1/x)$.)

Exercice 15 (Lemme de Schwarz)

Soit $f \in H(U)$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in U$.

1) Montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in U$.

2) Montrer que s'il existe z_0 tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe λ tel que $f(z) = \lambda z$.

Exercice 16 (Transformation de Koebe)

Soit $\alpha \in U$ et $\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$.

1) Montrer que φ_α est une bijection holomorphe de U dans U. Calculer $\varphi'_\alpha(0)$ et $\varphi'_\alpha(\alpha)$.

2) Soient $f : U \to U$ et $\alpha \in U$. On pose $\beta = f(\alpha)$. Montrer que $|f'(\alpha)| \leq \dfrac{1-|\beta|^2}{1-|\alpha|^2}$. (On posera $g = \varphi_\beta \circ f \circ \varphi_{-\alpha}$.)

Exercice 17 (Existence d'un zéro)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ qui contient U. Soit $f \in H(\Omega)$ tel que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f possède au moins un zéro dans U.

Exercice 18 (Une différence entre C^∞ pour $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)

Montrer qu'il n'existe qu'une seule fonction holomorphe telle que $f(1/n) = 1/n^2$ pour n assez grand. Montrer que par contre, il existe une infinité de fonctions réelles C^∞ qui vérifient cette condition.

Exercice 19 (Application des zéros isolés/prolongement analytique)

Soit f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω qui ne s'annulent pas. Soit (a_n) une suite de complexes 2 à 2 distincts qui converge dans Ω telle que $f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n)$ pour tout n. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f = cg$.

Singularités, Développement de Laurent et Théorème des résidus

Définition 7, Singularités : Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. On suppose que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ et que f est holomorphe que $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Alors on dit que z_0 est une singularité pour f.

Théorème 11 et Définition 8, Classification des singularités : Soit Ω un ouvert connexe et $f \in H(\Omega \setminus \{z_0\})$. Alors on a l'un des cas suivants:
a) f peut être définie en z_0 de sorte que la fonction prolongée soit holomorphe. On parle alors d'une singularité artificielle.
b) Il existe des complexes $c_1, \cdots, c_m$ avec $c_m \neq 0$ tels que $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ a une singularité artificielle en z_0. On parle alors d'une singularité isolée, appelée pôle d'ordre m et pour laquelle $\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z-z_0)^k}$ désigne la partie principale de f en z_0. f est dite méromorphe en z_0.
c) Il existe $r > 0$ avec $D(z_0, r) \subset \Omega$ tel que $Imf(\overline{D(z_0, r)})$ est dense dans $\mathbb{C}$. On parle alors d'une singularité essentielle.

Corollaire 5 et Définition 9, Développement de Laurent en une singularité isolée et Résidu : Dans les cas b) et c), on a l'existence d'une unique g entière, nulle en 0 telle que z_0 soit une singularité artificielle pour $z \mapsto f(z) - g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$. Si g est un polynôme, on est dans le cas b).
Le résidu de f en z_0 est le premier coefficient du développement de g en z_0 :

$$g\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = \frac{Res(f, z_0)}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)2} + \cdots.$$

Remarque 5 : Dans le cas d'une fraction $f(z) = P(z)/Q(z)$ avec P et Q deux fonctions holomorphes, et pour z_0 un pôle simple, on a $Res(f, z_0) = P(z_0)/Q'(z_0)$.

Dans le cas d'un pôle d'ordre m, on a la formule $Res(f, z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z-a)^m f(z)\right)$.

Théorème 12, Théorème des résidus : Soit Ω un ouvert étoilé, f holomorphe sur $\Omega \setminus (\cup_{i=1,\ldots,n}\{a_i\})$ et admettant des pôles aux points a_i, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi \sum Res(f, a_i)\, Ind_\gamma(a_i)$ pour chemin γ dans Ω ne rencontrant pas les a_i.

Remarque 6 : le Théorème des résidus se généralise aux ouverts simplement connexes, c'est-à-dire aux ouverts pour lesquels toute courbe fermée est homotope à 0 dans Ω. On dit que deux chemins γ_1 et γ_2 sont homotopes s'il existe $h : [0, 1]^2 \to \Omega$ continue telle que $h(0, t) = \gamma_1(t)$, $h(1, t) = \gamma_2(t)$ et $h(s, 0) = h(s, 1)$. (C'est-à-dire que γ_1 se "déforme" continuement en γ_1 dans Ω.) On dit que le chemin γ_1 est homotope à 0 si γ_1 est homotope à un chemin dont l'image est réduit à un point. Il existe des propriétés équivalentes à la propriété d'être un ouvert simplement connexe :
a) $\forall f \in H(\Omega)$, $\forall \gamma$ chemin fermé dans Ω, alors $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. (Cette propriété n'est rien d'autre que le théorème de Cauchy, les ouverts simplements connexes peuvent donc être défini comme les

ouverts sur lequel le théorème de Cauchy est vrai. Comme c'est le théorème de Cauchy qui est sous-jacent à toutes les preuves, c'est bien le cadre optimal pour une telle étude).
b) Ω est homéomorphe à U.
c) Toute $f \in H(\Omega)$ possède une primitive holomorphe.
d) Toute $f \in H(\Omega)$ possède un logarithme holomorphe.
de Toute $f \in H(\Omega)$ possède une racine carrée holomorphe.

Remarque 7 : On peut aussi en se placant sur la sphère de Riemann $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire en rajoutant à $\mathbb{C}$ un "point à l'infini", obtenir l'énoncé suivant : Soit f méromorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. On note P l'ensemble des pôles de f. Si pour tout chemin fermé de $\Omega \setminus P$, on a $Ind_\gamma(z) = 0$ pour tout $z \in S^2 \setminus \Omega$, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in P} Res(f,a)\, Ind_\gamma(a)$.

Définition 10, Développement en série de Laurent (général) : Soit $0 < R_1 < R_2$. Dans une couronne $C(R_1,R_2) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, R_1 < |z| < R_2\}$, on appelle série de Laurent une série de la forme $f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ où $f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est holomorphe sur $B(0,R_2)$ et $f_2(1/z) = \sum_{n>0} a_{-n} z^n$ est holomorphe sur $B(0,1/R_1)$. Une fonction complexe f sur $C(R_1,R_2)$ est dite développable en série de Laurent s'il existe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ qui coïncide avec f sur cette couronne.

Exercice 20 (Pôles et résidus)

1) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$.
a) Si $f = g/h$ avec $g,h \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$ et a zéro simple de h, alors $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{g(a)}{h'(a)}$.
b) Si $f(z) = g(z)/(z-a)^n$ avec $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$, alors $\mathrm{Res}(f,a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$.
c) Calculer les résidus aux pôles de $f(z) = \dfrac{z^2+z+1}{z(z^2+1)^2}$.

2) Soit $f(z) = \dfrac{2}{4z - z^2 - 1}$. Calculer les résidus de f. Calculer de deux façons $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ avec $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ pour en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\cos t}\,dt$.

Exercice 21 (Théorème des résidus)

1) Montrer le théorème 12 en considérant $f - \sum Q_i$ où les Q_i sont les parties principales de f aux pôles a_i.

2) Quelle est la conséquence de la question 3 de l'exercice 5 sur le calcul des $Ind_\gamma(a_i)$?

Exercice 22 (Théorème des singularités isolées de Riemann)

Soit $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$. On suppose que $D(z_0,r)\setminus\{z_0\} \subset \Omega$ et que f est holomorphe que $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$. Si f est bornée au voisinage de z_0, alors z_0 est une singularité artificielle pour f.

Exercice 23 [Dvlpt] (Existence d'un point singulier)

Précisons la notion de singularité dans le cas du bord de l'ensemble. Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ analytique dans U avec un rayon de convergence $R = 1$. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$. Le point a est dit régulier s'il existe un disque $D(a,r)$ tel que f admette un prolongement analytique sur $U \cup D(a,r)$, sinon on parle d'un point singulier.

1) Montrer que si $a_n \geq 0$ pour tout n, alors f a un point singulier en 1.

2) On cherche à montrer que f possède au moins un point singulier sur le cercle unité. Pour cela, on raisonne par l'absurde.
a) Montrer qu'il existe alors N disques $D(a_i,r_i)$ tels que f admet un prolongement analytique f_i à $U \cap D(a_i,r_i)$ et $\cup D(a_i,r_i)$ recouvre le cercle unité.
b) Obtenir alors un prolongement analytique de f sur $V = U \cup (\cup D(a_i,r_i))$.
c) Conclure.

3) Est-ce qu'il existe un lien d'implication entre les deux propriétés : z_0 est un point singulier et $f(z_0)$ diverge ?

4) Montrer que $f(z)=\sum z^{2^n}$ a tous les points du cercle unité comme point singulier. (Calculer $f(z^2)$.)

Exercice 24 (Calcul d'intégrales à l'aide du Théorème des résidus)

1) En appliquant le Théorème des résidus au domaine délimité par les segments $[0,R]$, $[0,Re^{2i\pi/n}]$ et l'arc $\{Re^{i\theta}, 0\leq\theta\leq 2\pi/n\}$, calculer $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx$ pour $n\geq 2$.

2) Calculer $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha x)}{\mathrm{ch}x+\mathrm{ch}a}\,dx$ en intégrant la fonction $e^{i\alpha z}/(\mathrm{ch}z+\mathrm{ch}a)$ le long du périmètre du rectangle ayant pour sommets $\pm R$, $\pm R+2i\pi$.

3) Calculer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$. (Utiliser e^{iz}/z.)

Exercice 25 (Prolongement et pôles)

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$ est uniformément convergente sur tout compact de l'ouvert $\Omega=\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ et que sa somme $f(z)$ est holomorphe sur Ω.

2) Pour $z\in\Omega$, on pose $h(z)=f(z)-\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$. Montrer que h est la restriction à Ω d'une fonction holomorphe H sur $\mathbb{C}$ qui vérifie $H(z+1)=H(z)$. Calculer $\displaystyle\lim_{y\to\infty}H(x+iy)$ et en déduire que $H=0$.

3) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

Exercice 26 (Développements en série de Laurent)

1) On veut montrer que toute fonction holomorphe sur $\Omega=C(R_1,R_2)$ est développable en série de Laurent dans cette couronne.

Soit $f\in H(\Omega)$.

a) Soit $R_1<r_1<r_2<R_2$, on note pour $i=1,2$, γ_i le cercle de centre 0 et de rayon r_i. Alors pour tout z tel que $r_1<|z|<r_2$, on a $f(z)=\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\left(\int_{\gamma_2}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi-\int_{\gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi\right)$.

b) En déduire que l'on peut décomposer f de façon unique sous la forme $f(z)=f_1(z)+f_2(1/z)$ avec $f_1\in H(|z|<R_2)$ et $f_2\in H(|z|<1/R_1)$, $f_2(0)=0$.

c) En déduire qu'il existe (a_n) telle que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nz^n$ converge dans Ω et vaut $f(z)$.

2) Qu'en est-il de l'unicité du développement en série de Laurent ?

3) Donner le développement de Laurent de la fonction $f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}+\dfrac{1}{3-z}$ sur $D(0,1)$, sur $C_1=\{1<|z|<3\}$ et $C_2=\{3<|z|\}$, puis de $g(z)=\dfrac{1}{1-z}e^{1/z}$ sur $C_3=\{1<|z|\}$ et $C_4=\{0<|z|<1\}$.

Compléments

Exercice 27 (Phragmen-Lindelöf)

1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de la bande $Q=\{x+iy\,;\,|y|\leq\pi/2\}$ vérifiant

$i)\forall x\in\mathbb{R}, |f(x\pm i\pi/2)|\leq 1$,

$ii)\exists A>0, \alpha<1$, tels que $\forall z\in Q$, $|f(z)|\leq\exp(A\exp(\alpha\mathrm{Re}z))$.

On veut montrer que $|f(z)|\leq 1$ pour tout $z\in Q$. Pour $\varepsilon>0$, $\alpha<\beta<1$, on pose $h_\varepsilon(z)=\exp(-\varepsilon(e^{\beta z}+e^{-\beta z}))$.

a) Vérifier que $|h_\varepsilon(z)|\leq 1$ pour $z\in Q$.

b) Calculer $\lim_{x\to\infty} h_\varepsilon(x+iy)f(x+iy)$.
d) Montrer que $|h_\varepsilon(z)f(z)| \leq 1$ pour $z \in Q$. (Utiliser le principe du maximum sur $Q \cap \{|x| \leq R\}$). Conclure.

2) Montrer que l'hypothèse $\alpha < 1$ ne peut être affaiblie (utiliser $f(z) = \exp(\exp(z))$).

Exercice 28 (Fonction ζ de Riemann)

Soit $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$. Montrer que holomorphe sur $\{Rez > 1\}$.

Remarque 8 : Ceci est un cas particulier des séries de Dirichlet. La fonction ζ se prolonge en une fonction méromorphe admettant un unique pôle simple en 1. On sait aussi que $-2, -4, -6, \cdots$ sont des zéros de la fonction ζ et que les autres sont dans la bande $0 < Rez < 1$. La conjecture de Riemann est que tous ces zéros sont en fait sur la droite $Rez = 1/2$. (On sait déjà qu'il y en a une infinité dessus.) On étudiera aussi le prolongement de la fonction Γ au plan complexe.

Théorème 13, Théorème de Montel : Soient $f_n \in H(\Omega)$ une famille uniformément bornée sur tout compact de Ω (appelée une famille normale). Alors on peut extraire une sous-suite de fontions holomorphes qui convergent uniformément sur tout compact.
Remarque 9 : Ce résultat se démontre à l'aide du théorème d'Ascoli et des inégalités de Cauchy. Une séance de développement est prévue dessus.

Exercice 29 (Application du Théorème de Montel)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \to \Omega$ holomorphe possédant au moins un point fixe a.

1) Montrer que les composées successives de f forment une famille normale. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

2) Montrer que si $f'(a) = 1$, alors $f = Id$.

3) Montrer que si $|f'(a)| = 1$, alors f est une bijection de Ω dans Ω.

Les énoncés suivants sont donnés à titre culturel, voir Rudin pour plus de détails :
Théorème 14, Théorème de Rouché : Soit $f, h \in H(\Omega)$ et $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$ tels que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ si $|z - a| = r$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans $D(z_0, r)$. (Comptés avec leur multiplicité.)
Théorème 15, Réciproque holomorphe : Soit Ω un ouvert connexe, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ avec $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe V et W des voisinages ouverts de z_0 et w_0 tel que f est une bijection de V sur W. Si g est définie par $g(f(z)) = z$, on a alors $g \in H(W)$.
Définition 11, Ouverts conformément équivalents : Les deux ouverts Ω_1 et Ω_2 sont dit conformément équivalents s'il existe $\varphi \in H(\Omega_1)$ bijection de Ω_1 sur Ω_2. (Alors par le théorème 15, φ^{-1} est aussi holomorphe.)
Théorème 16, Théorème de l'application conforme de Riemann : Tout ouvert connexe simplement connexe non vide (autre que le plan lui-même) est conformément équivalent au disque unité ouvert.

On peut aussi s'intéresser aux fonctions harmoniques (équivalence avec propriété de la moyenne, noyau de Poisson et problème de Dirichlet). (Voir Rudin)

Annexe : Exp, Log, ... complexes

On définit sur $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ homomorphisme analytique et surjectif de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}, \times)$.
On définit alors les fonctions réelles cos et sin par $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$. Ceci permet de définir tan et les fonctions réciproques.
On pose maintenant, pour $z = x + iy$ de module 1 avec $x \neq -1$, $\Theta(z) = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x+1}\right)$. La fonction Θ est une bijection continue telle que $\exp(i\Theta(z)) = z$ pour tout $z \in S^1 \setminus \{1\}$.
La fonction $\mathrm{Arg} : z \mapsto \Theta\left(\frac{z}{|z|}\right)$ est la détermination principale de l'argument sur $\mathbb{C}^*$.
Si $\mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \in]-\pi, \pi[$, alors on a $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$.

On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et sur Ω, on définit la détermination principale du log complexe selon : $\mathrm{Log}(z) = \ln(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$. Cette fonction est une bijection holomorphe de Ω dans $\{x + iy\,;\, x \in \mathbb{R}, -\pi < y < \pi\}$.
On peut définir aussi les fonctions cos et sin complexes selon $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ et $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Attention, ces fonctions sont très différentes de leur restriction à $\mathbb{R}$, par exemple, elles sont surjectives.

Bibliographie :

- Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, nombreux calculs d'intégrales par les résidus
- Chambert-Loir, Fermigier, Tome 2, ex 14, 15, 23, 26 et 29
- Dolbeault, ex 26
- Pabion, ex 14
- Pommellet, ex 13 et 28
- Rudin, Analyse réelle et complexe, ex 21, 22, 25 et 27, Th 11 à 16 et Rem 6
- Tauvel, Exercices d'analyse complexe, ex 16, 18, 19, 24 et 26
- Vauthier, Prat, Sujet 1992, ex 14