Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 5 - **Théorème de Weierstrass.**

Exercice 1 (Convolution et dérivation)

1) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ et g une fonction bornée, dérivable dont la dérivée est continue et bornée. Montrer que $f * g$ est dérivable et de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

2) Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et g une fonction dérivable et intégrable dont la dérivée est continue et intégrable. Montrer que $f * g$ est dérivable et de dérivée $(f * g)' = f * g'$.

3) Si g est de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, qu'obtient-on comme régularitée pour $f * g$?

4) Donner un exemple explicite de fonction de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Weierstrass par convolution)

On appelle identité approchée (sur $\mathbb{R}$) une suite de fonctions intégrables positives $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intégrale 1 et telle que pour tout $\eta > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\eta} \phi_n(t)\,dt = 0$.

1) Soit ϕ une fonction intégrable positive. Construire à partir de ϕ une identité approchée.

2) Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une identité approchée.

a) Si f est continue et bornée, montrer que la suite $(\phi_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers f. Si de plus f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ alors la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

b) Si $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \le p < +\infty$, montrer que la suite $(\phi_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$ vers f.

3) Troncature : Montrer que l'espace $L^p_c(\mathbb{R})$ des fonctions de $L^p(\mathbb{R})$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$. Puis montrer que $C^\infty_c(\mathbb{R})$ est dense dans $L^p(\mathbb{R})$ (au sens de la norme de L^p).

4) De quoi découle la densité de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^p(\mathbb{R})$?

Exercice 3 (Weierstrass par les polynômes de Bernstein)

Nous allons montrer le résultat suivant de deux façons :

Si f est continue sur $[0,1]$, les polynômes de Bernstein $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) R_n^k(x)$ avec $R_n^k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ convergent uniformément vers f sur $[0,1]$.

1) a) Calculer $B_n(1)$, $B_n(x)$, $B_n(x^2)$ et $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 R_n^k(x)$.

b) Montrer que pour tout $\eta > 0$, $\sum_{k, |k/n - x| \ge \eta} R_n^k(x) \le \frac{1}{n\eta^2}$.

c) Conclure.

2) Soient (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathbb{P}$, de moyenne ξ et de variance σ^2. On pose $M_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$.

a) Montrer que $E_n = \mathbb{E}(f(M_n))$ converge uniformément vers $f(\xi)$ sur $[0,1]$ en supposant que $\sigma^2(\xi)$ est borné sur $[0,1]$ et f continue sur $[0,1]$.

b) En prenant pour X_n une distribution de Bernouilli, montrer le théorème de Bernstein.

Références : Chambert-Loir 2, Gourdon, Objectif Agreg