Master 2 Agrégation, Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
UE5 - 7 - **Transformée de Fourier.**

Les fonctions considérées sont à valeurs complexes. On rappelle la notation multi-indice : si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, et $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors on note $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$, $\partial^\alpha f = \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$.

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on note $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ sa transformée de Fourier, définie par :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix.\xi} f(x) dx.$$

Exercice 1 (Régularité de $\widehat{f}$)

Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1) Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction continue, bornée sur $\mathbb{R}^d$ et telle que $\lim\limits_{|\xi| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

2) Montrer que si on suppose que $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$, avec $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour $|\alpha| \leq k$, alors

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi).$$

3) Montrer que si on suppose que $|x|^k f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^d)$, avec, pour $|\alpha| \leq k$,

$$\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi).$$

4) Quelle relation lie $\widehat{f * g}$, $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$?

Exercice 2 (Transformée de Fourier de la Gaussienne)

On cherche à calculer la Transformée de Fourier de $f(x) = e^{-x^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1) Première technique : passage dans $\mathbb{C}$. Posons, pour $z \in \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2} dx$. Montrer que F est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et qu'elle coïncide sur $\mathbb{C}$ avec $G(z) = \sqrt{\pi} e^{z^2/4}$.

2) Seconde technique : utilisation d'une équation différentielle. Quelle équation différentielle vérifie f ? En déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$ et conclure.

Exercice 3 (Formule d'Inversion de Fourier)

Nous allons montrer que : si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors f a un représentant continu, borné, tendant vers 0 à l'infini et

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix.\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Pour simplifier la présentation, nous ferons le cas $d = 1$.

1) En s'inspirant du 1) de l'Exercice 2, obtenir la Transformée de Fourier de $f(x) = e^{-zx^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{R}ez > 0$.

2) Montrer que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi$.

3) Montrer que $\dfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\, e^{-\varepsilon\xi^2}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} f(x + 2\sqrt{\varepsilon} u)\, du$.

4) Conclure à la Formule d'Inversion de Fourier.

5) Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$ p.p. Qu'est-ce que cela entraîne sur la Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$?

Exercice 4 (Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$)

Nous allons montrer tout d'abord le Théorème de Plancherel : si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Pour simplifier la présentation, nous ferons le cas $d = 1$.

1) Posons $\varphi_n(x) = \dfrac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$ et $\phi_n(t) = e^{-|t|/n}$. Montrer que $\varphi_n(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\phi_n(t)\,dt$, et pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, que $\varphi_n * f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\phi_n(t)\widehat{f}(t)\,dt$.

2) Posons $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$. Quelle est la Transformée de Fourier de g ? Montrer que g est intégrable, continue et bornée. Montrer que $\varphi_n * g(0) \underset{n\to+\infty}{\to} g(0)$. Conclure au Théorème de Plancherel.

3) Montrer que la transformation de Fourier sur $L^1 \cap L^2$ se prolonge donc en un isomorphisme isométrique $L^2(\mathbb{R}^d) \underset{\mathcal{F}}{\xrightarrow{\simeq}} L^2(\mathbb{R}^d)$.

Références : Faraut, Willem, Zuily