Commentaires sur le sujet d'examen de variable complexe et integration.

1) Il ne suffit pas de dire que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}$ est absolument convergente dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z)>1$ et que les fonctions $z\mapsto\frac{1}{n^z}$ sont analytiques dans ce demi-plan pour en déduire que la fonction $z\mapsto\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}$ est analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z)>1$. Le théorème que l'on applique habituellement exige de plus la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^z}$ sur tout compact de ce demi-plan, on procède de la manière suivante:

tout compact K du demi-plan $\mathrm{Re}(z)>1$ est contenu dans un demi-plan $\mathrm{Re}(z)>a>1$ et on a dans ce demi-plan $\left|\frac{1}{n^z}\right|=\frac{1}{n^{\mathrm{Re}(z)}}\leq\frac{1}{n^a}$. La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ étant convergente car $a>1$, on a donc convergence normale donc uniforme dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z)>a$, donc sur K.

2) Pour permuter le signes $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_I$ il ne suffit pas que

$$\int_I\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|dx<+\infty$$

Par exemple on a pour $x>0$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-2\frac{e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

donc

$$\int_{]0,+\infty[}\left|\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})\right|dx=\int_{]0,+\infty[}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}<+\infty$$

Mais $\int_{]0,+\infty[}\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-nx}-2e^{-2nx})dx=\int_{]0,+\infty[}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx>0$ alors que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}(e^{-nx}-2e^{-2nx})dx=\sum_{n=1}^{+\infty}0=0$$

Le théorème de Lebesgue habituel est le suivant:

Théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$

Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables sur A telle que

$$\int_A\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|\;dx<+\infty\text{ ou }\sum_{n=0}^{+\infty}\int_A|u_n|\;dx<+\infty$$

alors

a)la série $\sum u_n(x)$ converge pour presque tout $x\in A$

b)la fonction $x\to\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ est intégrable sur A

c)la série numérique $\sum \int_A u_n \; dx$ est convergente et on a

$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \; dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A u_n \; dx$$

Remarque

Dans ce qui précède, on voit que si $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|$ est intégrable alors la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est intégrable et on peut permuter les signes $\sum$ et $\int$.

Il se peut aussi que $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ ne soit pas intégrable, mais que l'on puisse quand même permuter $\sum$ et $\int$, comme le montre l'exemple suivant.

Soit $x \in A =]0, +\infty[$, on a

$$\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-nx}$$

Posons $u_n(x) = (-1)^n e^{-nx}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$$

et la fonction $x \to \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$ n'est pas intégrable sur A (car l'intégrale impropre en 0 est divergente), on n'a donc pas $\int_A \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| dx < +\infty$ et on ne peut appliquer le théorème ci-dessus.

Malgré cela, on a bien l'égalité

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{]0,+\infty[} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Pour le prouver il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx &= \int_{]0,+\infty[} \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^n e^{-nx} dx \\ &\quad + (-1)^M \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-Mx}}{1+e^{-x}} dx \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on a une somme finie, donc on peut permuter les signes$\int_{]0,+\infty[}$ et $\sum_{n=0}^{M-1}$

$$\int_{]0,+\infty[} \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{M-1} \int_{]0,+\infty[} (-1)^n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Pour montrer que $\sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^n}{n} \to \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx$ quand $M \to +\infty$, il ne reste plus qu'à montrer que

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-Mx}}{1+e^{-x}} dx \to 0 \text{ quand } M \to +\infty$$

ce que l'on voit à l'aide du théorème de la convergence dominée car $\frac{e^{-Mx}}{1+e^{-x}} \to 0$ pour tout $x > 0$ quand $M \to +\infty$ et on a la majoration

$$\frac{e^{-Mx}}{1+e^{-x}} \leq \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \text{ pour tout } M \geq 1$$

Remarque

Si on ne peut pas appliquer le théorème ci-dessus on peut aussi essayer d'appliquer le théorème de la convergence dominée aux sommes partielles $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ si on peut montrer que

a) $f_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \to f = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

b) qu'il existe une fonction g intégrable sur A telle que pour tout n

$$|f_n| = \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leq g$$

Dans ce cas $\int_A f_n dx \to \int_A f dx$ ce qui donne

$$\sum_{k=0}^{n} \int_A u_k dx = \int_A \sum_{k=0}^{n} u_k dx \to \int_A f dx = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} u_k dx$$

c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{+\infty} \int_A u_k dx = \int_A \sum_{k=0}^{+\infty} u_k dx$.