Agrégation de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Espaces L^p et l^p, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Inégalité de Clarkson)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que pour $p \in [2, +\infty[$, on a pour tout $f, g \in L^p(\Omega)$,

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p \right).$$

Exercice 2 (Espace de Banach)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrer que $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 3 (Convolution)

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $p \in [1, +\infty]$.
1) Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy.$$

2) Montrer que $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}.$$

3) Soit $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ où $1/p + 1/p' = 1$. On pose $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g)\, h = \int_{\mathbb{R}^N} g\, (\tilde{f} * h).$$

Exercice 4 (Densité)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On suppose que l'on a montré que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.
Soit ρ_n une suite régularisante, c'est-à-dire une suite de fonctions telles que

$$\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \text{Supp}\rho_n \in B(0, \frac{1}{n}),\ \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1,\ \rho_n \geq 0.$$

1) Soit $f \in C(\mathbb{R}^N)$. Montrer que

$$\rho_n * f \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{uniformément sur tout compact de } \mathbb{R}^N.$$

2) Soit $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < \infty$. Montrer que

$$\rho_n * f \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Exercice 5 (Théorème de Féjer)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodique. On note dans ce cas

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}.$$

On définit le noyau de Dirichlet selon

$$D_N = \sum_{n=-N}^{N} e_n, \quad e_n(x) = e^{inx}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt,$$

et le noyau de Féjer selon

$$K_N = \frac{1}{N} (D_0 + \cdots + D_{N-1}).$$

On rappelle les propriétés suivantes :

$$K_N = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) e_n, \quad K_N(x) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)} \right)^2,$$

$$\|K_N\|_1 = 1, \quad \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |x| \leq \pi} K_N(x)\, dx \text{ pour tout } \pi > \delta > 0,$$

$$\sigma_N(f)(x) = (f * K_N)(x) = \sum_{n=-N}^{N} (1 - \frac{|n|}{N}) c_n(f) e_n,$$

où la convolution est définie par

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y) g(y)\, dy.$$

1) Montrer que pour $f \in E$, on a

$$\|\sigma_N(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \quad \lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_\infty = 0.$$

2) Soit $f \in L^p(]0, 2\pi[)$ et 2π périodique, on pose $\tau_t f(x) = f(x+t)$. Montrer que

$$\|\tau_t(f) - f\|_p \underset{t \to 0}{\to} 0.$$

3) Montrer que si $f \in L^p(]0, 2\pi[)$ et 2π périodique, alors

$$\|\sigma_N(f)\|_p \leq \|f\|_p, \quad \lim_{N \to +\infty} \|\sigma_N(f) - f\|_p = 0.$$

Exercice 6 (Isométrie de l^p)

Soit $p \geq 1$, $p \neq 2$. Soit $\delta^k \in l^p$ définit par $\delta^k_n = \delta_{k,n}$. Soit G le groupe des automorphismes isométriques de l^p.

1) Soit ψ une permutation de $\mathbb{N}$ et (ε_n) une suite à valeurs dans $\{\pm 1\}$. On définit $T_{\psi,\varepsilon}$ de l^p dans l^p qui à (u_n) associe (v_n) où $v_n = \varepsilon_n u_{\psi(n)}$. Montrer que $T_{\psi,\varepsilon} \in G$.

2) a) Comparer $|a+b|^p + |a-b|^p$ et $2(|a|^p + |b|^p)$. Cas d'égalités ?

b) Pour $x, y \in l^p$, comparer $\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p$ et $2(\|x\|_p^p + \|y\|_p^p)$. Cas d'égalités ?

3) Soit $T \in G$.

a) Pour $u \in l^p$, on note

$$E_u = \{v \in l^p\,;\text{ le support de } v \text{ est disjoint de celui de } u\}.$$

Montrer que $E_{T(u)} = T(E_u)$.

b) Montrer que pour tout k, $T(\delta^k)$ est colinéaire à un δ^j.

c) Montrer qu'il existe ψ une permutation de $\mathbb{N}$ et (ε_n) une suite à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telles que $T = T_{\psi,\varepsilon}$.

Exercice 7 (Compacité dans L^p)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\omega}$ est compact dans Ω. Soit F un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que

$$\forall \varepsilon > 0, \delta > 0, \delta < dist(\omega,\ \Omega) \text{ tel que } \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon, \forall h \in \mathbb{R}^N,\ |h| < \delta,\ \forall f \in F.$$

Montrer que $F_{|\omega}$ est relativement compacte dans $L^p(\omega)$.

(On commencera par montrer que

$$\|\rho_n * \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon,\ \forall f \in F,\ \forall n > 1/\delta,$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement de f par 0 sur $\mathbb{R}^N$ et (ρ_n) une suite régularisante. On utilisera alors Ascoli avec la famille $(\rho_n * \tilde{F})_{\overline{\omega}}$.)