Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 2 - **Décomposition en éléments simples, fonctions convexes.**

Réviser, avant le TD, les dérivées et les primitives des fonctions usuelles.

Exercice 1 (Décompositions en éléments simples)

1) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$a)\ F_1(X) = \frac{1}{X^2 - X - 2}, \quad b)\ F_2(X) = \frac{X^2}{X+1},$$

$$c)\ F_3(X) = \frac{2X}{X^2 + X + 1}, \quad d)\ F_4(X) = \frac{X^4 + X^2 + 2}{X^3 + 5X^2 + 8X + 4}.$$

2) Déduire des résultats obtenues une primitive pour chacune de ces fractions rationnelles.

Exercice 2 (Applications de la décomposition en éléments simples aux séries et intégrales)

1) Calculer les sommes partielles, puis en déduire la nature et la somme éventuelle de la série de terme général

$$u_n = \frac{3n-1}{n^3 - 4n}.$$

Pour cela, on commencera par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{3X-1}{X^3 - 4X}.$$

2) Calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^4 - x^2 - 2}\, dx, \quad J(X) = \int_2^X \frac{x^2}{x^6 - 1}\, dx,$$

pour $X > 2$ et

$$K = \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{x^6 - 1}\, dx, \quad L(X) = \int_1^X \frac{1}{x(x^2+1)^2}\, dx$$

pour $X > 1$.

Exercice 3 (Inégalités de convexité)

1) Montrer que

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi} \qquad \text{pour tout } x \in [0, \pi/2].$$

2) Montrer l'inégalité arithmético-géométrique

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

pour tous $x_1, \cdots, x_n > 0$.

3) Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$ et p, q deux réels > 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

4) Montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

pour tous $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}^+$ et p, q deux réels > 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Exercice 4 (Fonctions convexes)

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante. Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \to I$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.