Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
L2 - Analyse 3 - Fiche 5 - **Séries entières.**

Exercice 1 (Rayons de convergence)

Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \; g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n x^n \quad (\text{où } a, b > 0),$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} x^n, \quad i(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{2^{2n}\sqrt{(2n)!}} x^n, \quad j(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+4n-1}{n+4}.\frac{1}{n!} x^n.$$

$$k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n! \sin(1)\sin(\frac{1}{2})\sin(\frac{1}{3})...\sin(\frac{1}{n})\, x^n, \quad l(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!} x^{2n}.$$

Exercice 2 (Sommes de séries entières)

Déterminer la somme des séries entières suivantes :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^n x^n, \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^{n-1},$$

$$i(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, x^n, \quad j(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\, x^n.$$

Exercice 3 (Ensemble de définition et continuité)

Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les fonctions suivantes sont bien définies

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}(-1)^{n+1}.$$

Sont-elles continues sur leur ensemble de définition ? Justifier.

Exercice 4 (Développements en série entière)

1) Rappeler le développement en série entière au voisinage de $x = 0$ des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto (1+x)^\alpha.$$

2) En déduire les développements en série entière au voisinage de $x = 0$ de :

$$x \mapsto 1/(1+x^2), \quad x \mapsto \ \mathrm{Arctan} x.$$

3) Développer en série entière au voisinage de $x = 0$ les fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2+x}, \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt, \quad h(x) = \ln((2-x)(x+3)).$$

Exercice 5 (Séries entières et équation différentielle)

On se considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ suivante sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$,

$$(\mathcal{E}) \qquad (x^2+x)\, y'' + (3\,x+1)\, y' + y = 0.$$

On cherche une solution de cette équation qui soit développable en série entière. On suppose que cette solution est de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R, R[.$$

a) Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $a_n = (-1)^n a_o$ et une expression simple de y (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue).

Exercice 6 (Séries entières et équation différentielle)

On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$x(x^2+1)y'' + (x^2-1)y' = 1.$$

1) On suppose qu'il existe une solution y de (E) développable en série entière :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R, R[.$$

Calculer a_1 et montrer que

$$(n+1)a_{n+1} + (n-1)a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 2.$$

Déterminer les coefficients a_n de cette série entière. Quel est son rayon de convergence ?

2) En déduire que l'expression des solutions de (E) développables en série entière est

$$x \mapsto -\text{Arctan}\ x + a\ln(1+x^2) + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$