Université de Nice Sophia Antipolis
Mémoire de Master 2

Lois de conservation scalaires stochastiques

Nathalie AYI

Sous la direction de Florent Berthelin, Maître de conférences

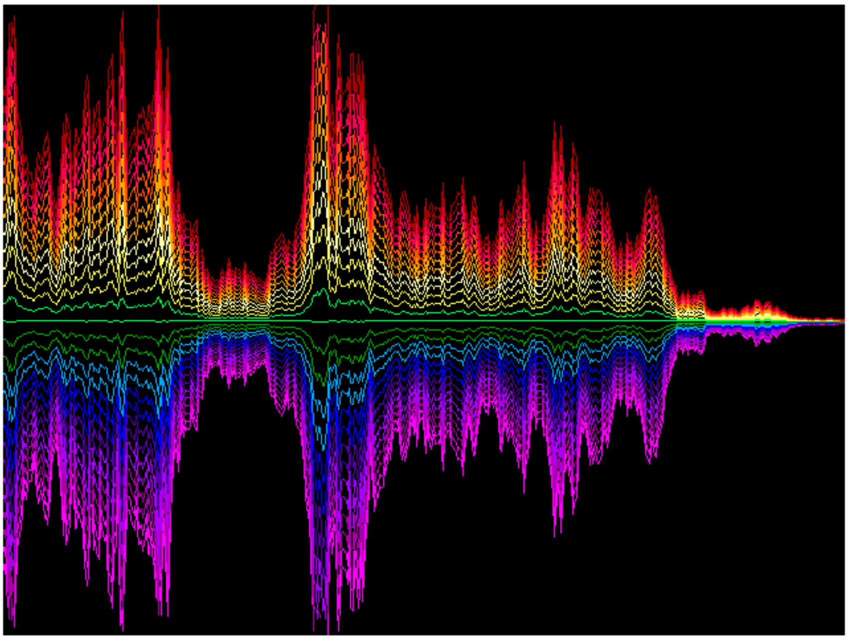

Figure 1 – Flot d'une équation différentielle stochastique, B. Ycard

Juin 2013

Remerciements

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidée dans la réalisation de ce mémoire. Tout d'abord, je tiens à remercier mon encadrant le maître de conférences Florent Berthelin pour la confiance qu'il m'a accordée, pour sa disponibilité et son accompagnement tout au long de cette période de stage. Un grand merci pour sa patience face aux nombreuses interrogations soulevées au cours de l'élaboration de ce mémoire et surtout pour les conseils et éclairages qu'il a pu y apporter.
Je tiens également à remercier le Professeur François Delarue pour sa disponibilité et son aide précieuse.
Enfin, je remercie Jean-Louis Thomin, Thierry Goudon et Magali Ribot qui m'ont permis d'effectuer ce stage dans les meilleures conditions possibles.

Table des matières

Introduction

Le but de ce mémoire est de mettre en lien l'article de B. Perthame et E. Tadmor [6] et l'article de J. Feng et D. Nualart [4] tous deux traitant de Lois de Conservation Scalaire, l'un dans le cas déterministe et l'autre dans le cas stochastique. Ce mémoire aura pour objectif de mettre en lumière le raisonnement et la démarche effectuée pour adapter des preuves et des notions développées dans le cadre déterministe au modèle stochastique.

Dans la littérature, il existe plusieurs notions de solutions à une équation aux dérivées partielles : des solutions fortes, des solutions faibles, etc ... L'une des premières démarches effectuées dans le cadre déterministe est de sélectionner une notion de solution que l'on qualifiera de “ bonne ” notion. On motivera et justifiera ce choix dans la partie 1.

Selon le mode de raisonnement que nous développerons tout au long de ce mémoire consistant à adapter autant que faire se peut les idées du modèle déterministe au modèle stochastique, il paraît alors raisonnable d'adapter cette notion de solution également dans le cadre stochastique. Notre but est alors de prouver l'existence d'une telle solution à notre Loi de Conservation Scalaire Stochastique que nous appellerons solution entropique forte stochastique.

Dans un contexte déterministe, l'existence d'une solution à la Loi de Conservation Scalaire peut s'établir de plusieurs façons différentes. Ici, le cheminement que nous emprunterons sera le suivant : on s'intéressera à l'échelle microscopique à une équation cinétique de type BGK, et le passage à la limite sur le macroscopique nous conduira à l'existence de notre solution. Toutefois, comme l'on peut s'en douter, le passage à la limite s'accompagne d'un lot de problèmes. Il n'est pas du tout évident que lorsque l'on a affaire à une suite de solutions, la limite en soit également une. C'est à ce moment qu'interviennent des outils mathématiques forts utiles. Dans le cas multidimensionnel, on peut faire appel à la compacité BV. Cependant, ne perdons pas de vue que l'on cherche des méthodes pouvant se généraliser au modèle stochastique. Or, comme on le justifiera dans la partie 2, ce genre de procédé ne fonctionne pas en stochastique. On va donc naturellement se tourner vers une autre méthode d'analyse fonctionnelle incontournable fournissant également un théorème d'existence de solutions : la compacité par compensation. On exposera dans la partie 2.3 les principaux résultats de cette théorie (on note qu'elle nous restreindra à la dimension 1) et muni de ces puissants théorèmes, on pourra alors prouver rigoureusement l'existence d'une certaine solution.

Si l'on revient finalement à notre modèle stochastique, la question naturelle à se poser est alors la suivante : peut-on obtenir des résultats de compacité par compensation en stochastique ? La réponse est oui, et c'est d'ailleurs l'un des principaux résultats de l'article de Feng et Nualart qui en plus d'établir l'existence d'une solution entropique forte stochastique, prouve dans un cadre général les versions stochastiques des Théorème Rotationnel-Divergence et Lemme de Murat, fondements de la théorie de compacité par compensation. Les preuves de ces propositions feront l'objet de la partie 3.

En parfait écho à la version déterministe, muni de ces instruments, nous exposerons alors les grandes étapes de construction de notre solution entropique forte stochastique sans rentrer dans des aspects trop techniques et calculatoires. L'accent sera ici porté sur l'intervention et l'utilisation de la compacité par compensation dans l'obtention de notre solution.

1 Lois de Conservation Scalaires Stochastiques

1.1 Le modèle stochatique

Nous allons nous intéresser à l'existence et l'unicité de l'équation aux dérivées partielles stochastique de premier ordre et non linéaire suivante que l'on nommera Loi de Conservation Scalaire Stochastique :

$$\boxed{\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = \int_{z\in Z} \sigma(x,u(t,x);z)\partial_t W(t,dz)} \tag{1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$, $u(t,x)$ une fonction scalaire aléatoire, $F = (F_1,\dots,F_d) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ le flux.

L'ensemble Z est un espace métrique et $W(t,dz)$ est un bruit blanc gaussien espace-temps par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ vérifiant

$$\mathbb{E}[W(t,A)W(t,B)] = \mu(A\cap B)t \tag{2}$$

pour A et B des ensembles mesurables inclus dans Z, et μ une mesure borélienne σ-finie (déterministe) sur l'espace Z. Enfin, $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times Z \to \mathbb{R}$.

On remarque que dans le cas $\sigma = 0$, on retombe sur l'équation aux dérivées partielles déterministe appelée Loi de Conservation Scalaire

$$\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = 0. \tag{3}$$

Exemple 1.

Soit $Z = \{1,2,\dots,m\}$ et μ une mesure de comptage sur Z, (1) devient

$$\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(x,u(t,x))\partial_t W_k(t) \tag{4}$$

où $W_1,\dots,W_m$ sont des mouvements Browniens indépendants.
En particulier, pour $d=1$ et $F(u) = \frac{|u|^2}{2}$, l'équation devient l'équation de Burgers stochastique

$$\partial_t u(t,x) + u(t,x)\partial_x u(t,x) = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k(x,u(t,x))\partial_t W_k(t). \tag{5}$$

1.2 Lien avec le modèle déterministe

On considère la Loi de Conservation multidimensionnelle scalaire

$$\partial_t u(x,t) + \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}[A_i(u(x,t))] = 0 \tag{6}$$

avec $(x,t) \in \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^+_t$, $A_i(.) \in \mathcal{C}^1$ et avec $u(x,t=0) = u_0(x)$ comme condition initiale.

Dans le cadre déterministe, on s'intéresse, à l'échelle microscopique, à une équation cinétique de type BGK. On introduit une fonction scalaire $f_\varepsilon(x,v,t)$ qui peut être vue comme une description microscopique de la densité de particule localisée en $(x,t) \in \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^+_t$ avec $v \in \mathbb{R}$ pour vitesse. Le modèle évolue alors selon

$$[\partial_t + a(v).\partial_x]f_\varepsilon(x,v,t) = \frac{1}{\varepsilon}[\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v) - f_\varepsilon(x,v,t)] \tag{7}$$

avec $f_\varepsilon(x,v,0)$ comme donnée initiale. Les particules sont transportées selon

$$a(v).\partial_x \equiv \sum_{i=1}^{d} a_i(v)\partial_{x_i} \tag{8}$$

avec $a_i(.) \equiv A_i'(.)$.

On note

$$u_\varepsilon(x,t) = \int_v f_\varepsilon(x,v,t)dv \tag{9}$$

la densité locale de particules en un certain (x,t) et la " fonction d'équilibre " $\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v)$ est la signature de $u_\varepsilon(x,t)$, i.e.,

$$\chi_u(v) = \begin{cases} \text{sgn } u, & \text{si } (u-v)v \geq 0 \\ 0, & \text{si } (u-v)v < 0. \end{cases}$$

L équation (7) est bien posée dans $L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v))$ et $u_\varepsilon(x,t)$ tendra vers une solution de (6).

On doit ici faire une précision sur le sens que l'on donne au mot "solution". En effet, lorsque l'on traite d'équation aux dérivées partielles, un problème peut admettre plusieurs solutions.

Exemple 2.

Pour l'équation de Burgens,

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x(\frac{u^2(t,x)}{2}) = 0 \\ u(0,x) = u^0(x) \end{cases}$$

on a

$$u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < t/2 \\ 1 & \text{si} \quad x > t/2 \end{cases} \qquad et \qquad u(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ x/t & \text{si} & 0 < x < t \\ 1 & \text{si} & x > t \end{cases}$$

sont deux solutions faibles de cette équation.

On introduit alors une nouvelle notion pour sélectionner la "bonne" solution : l'entropie.

Définition 1.

On dit que (η, G) est un couple entropie-flux d'entropie pour le système $\partial_t u + div_x F(u) = 0$ si η est convexe et pour pour toute solution régulière, on a $\partial_t \eta(u) + div_x G(u) \leq 0$.
Dans le cas $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, cela revient à dire que G vérifie $G' = \eta' F'$.

Ainsi, l'entropie est un bon choix car elle permet de sélectionner une unique solution d'après le théorème suivant :

Théorème 1 (Kruzkhov)**.**

Soit $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, Il existe au plus une solution $u \in \mathcal{C}([0,T], L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty([0,T] \times \mathbb{R})$ entropique de $\partial_t u + div_x F(u) = 0$.

***Remarque* :** On peut également formuler l'énoncé avec la méthode de solution entropique suivante

$$\partial_t |u-k| + \partial_x(sgn(u-k).(F(u) - F(k))) \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

C'est d'ailleurs cette méthode que nous utiliserons pour prouver ce théorème.

Preuve du Théorème :

Etape 1 Technique de dédoublement des variables

On a

$$\int\int |u-k|\partial_t\varphi + sgn(u-k)(F(u)-F(k))\partial_x\varphi \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}), \quad \varphi \geq 0. \tag{11}$$

Si on se donne une seconde solution entropique v, on a

$$\int\int |v-l|\partial_s\varphi + sgn(v-l)(F(v)-F(l))\partial_y\varphi \, dy \, ds \geq 0, \quad \forall l \in \mathbb{R}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R}), \quad \varphi \geq 0. \tag{12}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T]^2 \times \mathbb{R}^2)$, $\varphi(t,s,x,y)$, on fixe $(s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ et on pose $k = v(s,y)$ on réécrit (11) et on obtient

$$\int\int |u(t,x)-v(s,y)|\partial_t\varphi + sgn(u(t,x)-v(s,y))(F(u(t,x))-F(v(s,y))\partial_x\varphi \, dx \, dt \geq 0, \quad \forall (s,y). \tag{13}$$

De même, on fixe $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ et on pose $l = u(t,x)$ on réécrit (12) et on obtient

$$\int\int |v(s,y)-u(t,x)|\partial_s\varphi + sgn(v(s,y)-u(t,x))(F(v(s,y)-F(u(t,x)))\partial_y\varphi \, dy \, ds \geq 0, \quad \forall (t,x). \tag{14}$$

Enfin, on effectue $\int\int (13)dyds + \int\int (14)dxdt$ et on obtient

$$\int\int\int\int |u(t,x)-v(s,y)|(\partial_t\varphi+\partial_s\varphi) + sgn(u(t,x)-v(s,y)) \\ (F(u(t,x)) - F(v(s,y))(\partial_x\varphi+\partial_y\varphi)\ dx\ dt\ dy\ ds \geq 0. \quad (15)$$

Etape 2 On concentre en $t = s$ et $x = y$

Soit $\eta \geq 0$ tel que $\int \eta = 1$, η à support compact, on définit η_ε de la façon suivante $\eta_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}\eta(\frac{z}{\varepsilon})$. On prend φ comme suit :

$$\varphi(t,s,x,y) = \eta_\varepsilon(\frac{t-s}{2})\eta_\varepsilon(\frac{x-y}{2})\Phi(\frac{t+s}{2},\frac{x+y}{2})$$

avec $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$, $\Phi \geq 0$. On effectue alors le changement de variable suivant :

$\tau = \frac{t+s}{2}$, $\sigma = \frac{t-s}{2}$, $w = \frac{x+y}{2}$, $z = \frac{x-y}{2}$.

Alors on a

$$\int\int \Delta(\sigma,z)\eta_\varepsilon(z)\eta_\varepsilon(\sigma)d\sigma dz \geq 0 \quad (16)$$

où

$$\Delta(\sigma,z) = \int\int |u(\sigma+\tau,w+z)-v(\tau-\sigma,w-z)|\partial_t\Phi(\tau,w) \\ + sgn(u(\sigma+\tau,w+z)-v(\tau-\sigma,w-z)). \\ .(F(u(\sigma+\tau,w+z)) - F(v(\tau-\sigma,w-z))).\partial_w\Phi(\tau,w)d\tau dw. \quad (17)$$

On fait tendre ε vers 0 et ainsi (16) devient $\Delta(0,0) \geq 0$ i.e.

$$\int\int |u(\tau,w)-v(\tau,w)|\partial_t\Phi(\tau,w) + sgn(u(\tau,w)-v(\tau,w))(F(u(\tau,w)) - F(v(\tau,w))). \\ .\partial_w\Phi(\tau,w)d\tau dw \geq 0. \quad (18)$$

Etape 3 On a une inégalité de la forme $\int\int a(\tau,w)\partial_\tau\Phi\ +\ b(\tau,w)\partial_w\Phi dwd\tau \geq 0$ i.e. on a $\partial_\tau a(\tau,w) + \partial_w b(\tau,w) \leq 0$.

On intègre alors par rapport à w et on obtient $\frac{d}{d\tau}\int a(\tau,w)dw \leq 0$ i.e. $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|dx \leq 0$.

Etape 4 Conclusion

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} |u(t,x)-v(t,x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u^0(x)-v(x)|dx$ donc si $u^0 = v^0$ alors $u = v$ pour presque tout x et ainsi, $u = v$.

□

1.3 Notations

On note l'espace de Schwartz

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty : \sup_x |x^m D_x^n f(x)| < \infty, m,n = 1,2,\ldots\}. \quad (19)$$

On définit $J \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ par

$$J(x) = \begin{cases} Cexp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

où $C > 0$ est la constante telle que $\int_{\mathbb{R}^d} J(z)dz = 1$. Pour chaque $\varepsilon > 0$, on pose $J_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-d}J(\varepsilon^{-1}|z|)$. $J_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ avec le support de $J_\varepsilon \subset [-\varepsilon,\varepsilon]^d$. Pour chaque $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^d)$, on définit la suite régularisante

$$f_\varepsilon(x) = J_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} J_\varepsilon(y)f(x-y)dy. \quad (20)$$

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$, alors la fonction $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $a_+ = max\{a, 0\}$. Alors $|a| = a_+ + (-a)_+$.

On cherche alors à approcher la fonction $\beta(r) = r_+ \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. On se place dans le $d = 1$ et on définit

$$\rho_\varepsilon(r) = \int_{-\infty}^{r-\varepsilon} J_\varepsilon(s)ds, \qquad \beta_\varepsilon(r) = \int_{-\infty}^{r} \rho_\varepsilon(s)ds, \qquad r \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Alors on obtient le résultat suivant :

Lemme 1.

$\rho_\varepsilon, \beta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ont les propriétés suivantes : $\beta_\varepsilon' = \rho_\varepsilon$, $\beta_\varepsilon'' = J_\varepsilon(r-\varepsilon)$; ρ_ε est une fonction croissante et

$$\beta_\varepsilon'(r) = \rho_\varepsilon = \begin{cases} 0 & si\ r \leq 0 \\ 1 & si\ r \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

et β_ε est convexe et

$$\beta_\varepsilon(r) = \begin{cases} 0 & si\ r \leq 0 \\ \varepsilon\hat{C} + (r - 2\varepsilon) & si\ r \geq 2\varepsilon \end{cases}$$

où $\hat{C} = \int_{-1}^{1}(\int_{t=-1}^{s} J(t)dt)ds < 2$. De plus, on a

$$0 \leq \beta_\varepsilon''(r) = J_\varepsilon(r-\varepsilon) \leq \varepsilon^{-1}C, \qquad 0 \leq r \leq 2\varepsilon \tag{22}$$

et donc

$$0 \leq r\beta_\varepsilon''(r) \leq 2C, \qquad pour \qquad 0 \leq r \leq 2\varepsilon. \tag{23}$$

1.4 Solution entropique forte stochastique

On revient à notre équation aux dérivées partielles stochastique (1). On définit à nouveau les notions d'entropie, mais dans le cas stochastique cette fois-ci.

Définition 2.

(Φ, Ψ) est un couple entropie-flux d'entropie si $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs satisfaisant

$$\Psi_k'(r) = \Phi'(r)(F_k')(r), \qquad k = 1, \ldots, d. \tag{24}$$

***Remarque* :** Ψ_k peut être choisi ainsi

$$\Psi_k(r) = \int_v^r \Phi'(s)(F_k')(s)ds, \qquad v \in \mathbb{R}. \tag{25}$$

On remarque que contrairement au cas déterministe, on n'impose pas à Φ d'être convexe dans cette définition.

On va définir une classe spéciale de couples entropie-flux d'entropie $\mathcal{K}$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\beta = \beta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction convexe,

$$\beta(r) = 0, \qquad r \leq 0, \qquad \beta(r) = C_\varepsilon + r, \qquad C_\varepsilon > 0, r \geq \varepsilon \tag{26}$$

$\mathcal{K} = \{(\Phi, \Psi)$est un couple entropie-flux d'entropie tel que $\Phi(r) = \Phi^u(r) = \beta(u - r)$ ou $\Phi(r) = \Phi_v(r) = \beta(r - v), u, v \in \mathbb{R}\}$.

On peut alors définir la notion de solution entropique forte stochastique.

Définition 3 (Solution entropique forte stochastique**).**

Soit $(\Omega, \{\mathcal{F}_t : t \geq 0\} \subset \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré où $W(t, .)$ est un bruit blanc gaussien espace-temps satisfaisant (2).

On appelle un processus stochastique $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ $u = u(t) = u(t, x)$

une solution entropique forte stochastique de (1) à condition que

1. Pour tout $T > 0$, $p = 2, 3, 4, \dots$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[\|u(t)\|_p^p] < \infty \tag{27}$$

et pour tout $N = 1, 2, \dots$,fixé

$$\int_0^T \mathbb{E}[\int_{z \in Z} \int_{|x| \leq N} |\sigma(x, u(r,x); z)|^4 dx \mu(dz)] dr < \infty. \tag{28}$$

2. Pour tout $0 \leq s \leq t$, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{K}$,

$$\begin{aligned} &< \Phi(u(t,.)), \varphi > - < \Phi(u(s,.)), \varphi > \\ &\leq \int_s^t < \Psi(u(r,.)), \nabla_x \varphi > dr + \int_{(s,t] \times Z} \frac{1}{2} < \Phi''(u(r,.)) \sigma^2(., u(r,.); z), \varphi > \mu(dz) dr \\ &\quad + \int_{(s,t] \times Z} < \Phi'(u(r,.)).\sigma(., u(r,.); z), \varphi > W(dr, dz). \end{aligned} \tag{29}$$

3. Pour tout processus $\{\mathcal{F}_t\}$-adapté à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ $\tilde{u}(t)$ satisfaisant

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E}[\|\tilde{u}(t)\|_p^p] < \infty, \qquad T > 0, \quad p = 2, 3, \dots, \tag{30}$$

et pour tout $\beta \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ de la forme (21), $0 \leq \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et

$$f(r, z; v, y) = \int_{x \in \mathbb{R}^d} \beta'(\tilde{u}(r,x) - v) \sigma(x, \tilde{u}(r,x); z) \varphi(x,y) dx, \tag{31}$$

il existe une fonction déterministe $\{A(s,t) : 0 \leq s \leq t\}$ telle que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\int_y \int_{(s,t] \times Z} f(r, z; u(t,y), y) W(dr, dz) dy] \\ &\leq \mathbb{E}[\int_{(s,t] \times Z} \int_y \frac{\partial}{\partial v} f(r, z; \tilde{u}(r,y), y) \sigma(y, u(r,y); z) \mu(dz) dy dr] + A(s,t) \end{aligned} \tag{32}$$

avec la propriété suivante : pour tout $T > 0$ il existe une partition $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ satisfaisant

$$\lim_{\max_i |t_{i+1} - t_i| \to 0^+} \sum_{i=1}^m A(t_i, t_{i+1}) = 0. \tag{33}$$

Remarque : On peut réécrire l'inégalité (29) en termes d'inégalité de distribution :

$$\begin{aligned} &\partial_t \Phi(u(t,x)) + div_x \Psi(u(t,x)) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_Z \Phi''(u(t,x)) \sigma^2(x, u(t,x); z) \mu(dz) + \int_Z \Phi'(u(t,x)) \sigma(x, u(t,x); z) \frac{\partial W(t,dz)}{\partial t}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ainsi, lorsque $\sigma = 0$, le membre de droite est réduit à 0 et l'on retombe sur l'inégalité introduite par Kruzkhov dans la définition d'une solution entropique dans le cadre déterministe.

1.5 Résultat principal

L'article de Feng et Nualart établit l'existence d'une solution entropique forte stochastique. Pour ce faire, nous sommes tout de même amené à imposer des conditions. On introduit deux jeux de conditions :

Conditions 1.

1. $F_k \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $F_k''(s)$ est au moins à croissance polynomiale en s, pour tout $k = 1, \dots, d$.

2. Pour tout sous-ensemble $K \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, il existe $M_K : Z \to \mathbb{R}$ et une fonction positive, croissante, continue $\rho_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $\rho_K(0) = 0$ telle que

$$|\sigma(y, v; z) - \sigma(x, v; z)| \leq (|u - v|^{1/2}\rho_K(|u - v|) + |x - y|)M_K(z) \tag{35}$$

pour tout $(x, y) \in K, z \in Z$ avec

$$C_K \equiv \int_{z \in Z} M_K^4(z)\mu(dz) < \infty. \tag{36}$$

Exemple 3.

Soit $\sigma_k : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne pour chaque $k = 1, \dots, m$ et on considère l'équation (4) de notre premier exemple. Alors, la seconde partie des conditions du dessus est satisfaite.

Conditions 2.

1. d=1.
2. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et l'ensemble $\{r \in \mathbb{R} : F''(r) \neq 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Il existe $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, une constante déterministe $C > 0$ et $M : Z \to \mathbb{R}$ tels que $\int_Z M^4(z)\mu(dz) < \infty$,
$$|\sigma(x, u; z)| \leq f(x)(1 + |u|)M(z) \tag{37}$$
et
$$|\sigma(x, u; z) - \sigma(y, v; z)| \leq C(|u - v| + |x - y|)(M(z) + |\sigma(x, u; z)|). \tag{38}$$

On obtient alors le principal résultat suivant :

Théorème 2.

On suppose que l'on est sous les Conditions 1 et 2 et que u_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $\bigcap_{p=1,2,\dots} L^p(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant

$$\mathbb{E}[\|u_0\|_p^p + \|u_0\|_2^p] < \infty, \qquad p = 1, 2, \dots \tag{39}$$

Alors il existe une solution entropique forte stochastique pour (1) avec u_0 pour valeur initiale.

Remarque : L'autre résultat escompté était d'établir l'unicité mais une erreur s'est glissée dans l'article rendant la preuve non rigoureuse.

2 Existence dans le cadre déterministe

Revenons à présent à notre équation du modèle déterminisme. Nous nous inspirerons des preuves développées dans cette section un peu plus tard.

2.1 L'équation cinétique est bien posée

On établit le résultat suivant en faisant appel à la théorie des points fixes. On ne s'attardera toutefois pas sur ce point car ce n'est pas l'objet principal de notre développement. Cependant, il est bon de justifier que ce l'on manipule a un sens :

Théorème 3.

Le modèle cinétique (7) est bien posé dans $L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v))$. De plus, on a

$$\sup_{t \geq 0} \|f_\varepsilon(x, v, t) - g_\varepsilon(x, v, t)\|_{L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v)} \leq \|f_\varepsilon(x, v, 0) - g_\varepsilon(x, v, 0)\|_{L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v)}. \tag{40}$$

Remarque : On obtient également les inégalités suivantes qui nous serons par la suite utiles :

$$\int_v \|f_\varepsilon(x,v,t)\|_{L^\infty(\mathcal{B}[r])}dv \leq \int_v \|f_\varepsilon(x,v,0)\|_{L^\infty(\mathcal{B}[r+ta_\infty])} \tag{41}$$

et

$$\|u_\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^+_t)} \leq \int_v \|f_\varepsilon(x,v,0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d_x)}dv \tag{42}$$

où $a_\infty = \{\max_i |a_i(v)|, c \in [-v_\infty, v_\infty] \cup supp_v f_\varepsilon(x,v,0)\}$ et $v_\infty = \|f_\varepsilon(x,v,0)\|_{L^1(\mathbb{R}_v;L^\infty(\mathbb{R}^d_x))}$.
On précise ici que l'on choisit $f_\varepsilon(x,.,0)$ à support compact dans $\mathbb{R}_v$.

On peut alors prouver l'existence d'une unique solution entropique des deux façons suivantes : des arguments de compacité BV dans le cas multidimensionnel et des arguments de compacité par compensation dans le cas de la dimension 1 permettent d'établir que la densité locale de particules u_ε converge fortement quand ε tend vers 0 vers cette solution.

2.2 Lien entre existence et compacité BV

Dans le cadre déterministe, le cas multidimensionnel est traité avec des arguments de compacité BV. En effet, l'idée est d'utiliser des estimations BV et de faire appel au théorème de Helly afin d'extraire une sous-suite qui convergera vers notre unique solution entropique. Toutefois, pour établir les estimations BV, on fait appel à l'invariance par translation en les variables spatiales du modèle cinétique déterministe. Or, ce genre de procédé ne se généralise pas bien au modèle stochastique. En effet, à cause du terme σ, la translation spatiale d'une solution n'est, en général, pas une autre solution.

Ainsi, on se tournera plutôt vers la seconde méthode développée dans le cadre déterministe : la compacité par compensation. On restreindra alors nos considérations à un espace de dimension 1.

2.3 Compacité par compensation

On rappelle ici les principaux résultats de compacité par compensation que l'on utilisera par la suite.

Ils interviennent dans deux cas de figure. Le premier est celui qui consiste à établir le lien entre la convergence faible d'une suite de fonctions et la convergence forte. En effet, on peut très bien se retrouver dans la situation suivante : Soit U un ouvert régulier borné, $1 < q < \infty$, $f_k \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^q(U)$ mais $f_k \nrightarrow f$ fortement dans $L^q(U)$.Des problèmes d'oscillations, fluctuations très rapide des fonctions, ou des problèmes de concentration, la masse de $|f_k - f|^q$ peut être concentrée sur un ensemble de mesure nulle, peuvent empêcher ce passage de la convergence faible à la convergence forte. On introduit alors la notion de mesure de Young qui va pouvoir fournir un échappatoire à ce genre de problèmes.

Théorème 4.

Soit $(f_k)_{k\geq 1}$ bornée dans $L^\infty(U,\mathbb{R}^m)$, alors il existe une sous-suite $(f_{k_j})_{j\geq 1} \subset (f_k)_{k\geq 1}$ et pour presque tout $x \in U$ une mesure de probabilité borélienne ν_x sur $\mathbb{R}^m$ telles que :

$$\forall F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m),\ \text{on a}\ F(f_{k_j}) \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{F}\ \text{dans}\ L^\infty(U)$$

où $\bar{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} F(y)d\nu_x(y)$ pour presque tout $x \in U$.

Définition 4.

On appelle $(\nu_x)_{x\in U}$ la famille des mesures de Young associées à la suite $(f_{k_j})_{j\geq 1}$.
On dit que $(f_{k_j})_{j\geq 1}$ converge au sens de Young vers ν.

On établit alors le résultat suivant :

Proposition 1.

Soit $(u_k)_{k\geq}$ une suite de $L^\infty(U,\mathbb{R}^m)$ convergente au sens de Young vers la mesure ν. Soit u sa limite faible, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$\exists p \in [1,\infty[$ tel que $\|u^k - u\|_{L^p(\omega)} \to 0$ $\forall$ ouvert borné ω dans U.*
2. *$\forall p \in [1,\infty[$ tel que $\|u^k - u\|_{L^p(\omega)} \to 0$ $\forall$ ouvert borné ω dans U.*
3. *Pour presque tout $x \in U$, ν_x est une mesure de Dirac.*

Le deuxième cas de figure est basé sur la constatation suivante : la convergence faible ne se comporte pas bien lorsque l'on compose par des applications non linéaires.

Exemple 4.

Soit $a < b$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $F(\lambda a + (1-\lambda)b) \neq \lambda F(a) + (1-\lambda)F(b)$. On pose

$$f_k(x) = \begin{cases} a & \text{si } \frac{j}{k} \leq x \leq \frac{j+\lambda}{k} \qquad j = 0, \ldots, k-1 \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f \equiv \lambda a + (1-\lambda)b$ dans L^∞ alors que $F(f_k) \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda F(a) + (1-\lambda)F(b) \neq F(f)$.

Toutefois, pour des fonctions F particulières, lorsque l'on a un certain contrôle sur la divergence et le rotationnel, on peut établir des résultats.

Notations.

Si $w \in L^2(U, \mathbb{R}^n)$, $w = (w^1, \ldots, w^n)$, on définit $rot\ w \in W^{-1,2}(U, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ en posant

$$(rot\ w)_{i,j} = \partial_{x_j} w^i - \partial_{x_i} w^j \qquad (1 \leq i, j \leq n).$$

On obtient alors les deux résultat suivants :

Théorème 5 (Lemme Divergence-Rotationnel)**.**

Soit $(u_k)_{k\geq 1}$ et $(w_k)_{k\geq 1}$ deux suites bornées dans $L^2(U, \mathbb{R}^n)$ telles que

1. *$(div\ v_k)_{k\geq 1}$ est contenu dans un compact de $H^{-1}(U)$.*
2. *$(rot\ w_k)_{k\geq 1}$ est contenu dans un compact de $H^{-1}(U, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.*

Si, de plus, $v_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} v$ et $w_k \overset{L^2}{\rightharpoonup} w$

Alors $v_k.w_k \rightharpoonup v.w$ au sens des distributions.

Corollaire 1.

Soit $(a_k)_{k\geq 1}$, $(b_k)_{k\geq 1}$, $(c_k)_{k\geq 1}$ et $(d_k)_{k\geq 1}$ quatre suites de fonctions scalaires bornées dans $L^\infty(U)$ qui convergent faiblement dans L^∞ vers a, b, c et d respectivement.

Supposons que les suites $\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial b_k}{\partial x}$, $\frac{\partial c_k}{\partial t} + \frac{\partial d_k}{\partial x}$ sont dans un compact de $H^{-1}_{loc}(U)$.
Alors $a_k d_k - b_k c_k \overset{*}{\rightharpoonup} ad - bc$ dans $L^\infty(U)$.

De plus, si $u_k = (a_k, b_k, c_k, d_k)$ est aussi bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on peut en extraire une sous-suite qui converge au sens de Young vers une mesure $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ où ν_x est une probabilité sur $\mathbb{R}^4$. Identifiant $\mathbb{R}^4$ à $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la propriété du dessus se traduit par la formule

$$< \nu_x, det >= det < \nu_x, id > \tag{43}$$

pour presque tout $x \in \Omega$.

Enfin, dans la pratique, pour pouvoir vérifier les conditions d'utilisation de ces théorèmes, on fait souvent appel au lemme de Murat.

Lemme 2 (Lemme de Murat)**.**

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^m$ et $(d^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une suite bornée de $W^{-1,\infty}(\omega)$ qui reste dans un ensemble $B + C$ où B est un compact de $H^{-1}(\omega)$ et C est un borné de $\mathcal{M}(\omega)$.
Alors $(d^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $H^{-1}(\omega)$.

2.4 Lien entre existence et compacité par compensation

On réécrit notre loi de conservation scalaire dans le cas de la dimension 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial A(u)}{\partial x} = 0. \tag{44}$$

Une équation cinétique correspondante est

$$[\frac{\partial}{\partial t} + a(v)\frac{\partial}{\partial x}]f_\varepsilon(x, v, t) = \frac{1}{\varepsilon}[\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v) - f_\varepsilon(x, v, t)] \tag{45}$$

avec $a(.) \equiv A'(.)$, $A \in \mathcal{C}^1$.

On peut alors établir le résultat suivant :

Théorème 6.

On considère la Loi de Conservation (44), soit $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^1(\mathbb{R}_v; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_x)))$ la solution de l'équation cinétique correspondante telle que

$$u_\varepsilon(x,0) \equiv \int_v f_\varepsilon(x,v,0)dv \to u_0(x) \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}_x^d).$$

Alors $u_\varepsilon(x,t) \equiv \int_v f_\varepsilon(x,v,t)dv$ converge fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+)$, $p < \infty$ vers l'unique solution entropique de la Loi de Conservation non linéaire (44) ayant pour condition initiale $u(x,t=0) = u_0(x)$.

***Remarque* :** Par non linéaire, on veut dire qu'il n'existe pas d'intervalle sur lequel le flux $A(u)$ est linéaire i.e. $A''(u) \neq 0$ p.p.

Afin de démontrer ce théorème, on prouve les deux lemmes suivants.

Lemme 3.

Pour toute solution $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v))$ du modèle cinétique (7), on a l'inégalité suivante

$$\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv \leq -\frac{1}{\varepsilon}[\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv - |u_\varepsilon - k|]. \tag{46}$$

De plus,

$$\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv \leq 0. \tag{47}$$

Preuve du Lemme : On intègre (45) par rapport à v contre $sgn(f_\varepsilon - \chi_k)$ et on a par des arguments de régularisation de la fonction signe

$$\begin{aligned}
&\partial_t \textstyle\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv = -\frac{1}{\varepsilon}\int_v sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(f_\varepsilon - \chi_{u_\varepsilon})dv\\
&= -\tfrac{1}{\varepsilon}\textstyle\int_v sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(f_\varepsilon - \chi_k + \chi_k - \chi_{u_\varepsilon})dv\\
&= -\tfrac{1}{\varepsilon}\textstyle\int_v [|f_\varepsilon - \chi_k| + sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(\chi_k - \chi_{u_\varepsilon})]dv\\
&\leq -\tfrac{1}{\varepsilon}[\textstyle\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv - |u_\varepsilon - k|].
\end{aligned}$$

En effet, on rappelle que $\int_{\mathbb{R}} |\chi_k(v) - \chi_{k'}(v)|dv = |k - k'|$.
De plus, $-\frac{1}{\varepsilon}\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv \leq -\frac{1}{\varepsilon}|\int_v (f_\varepsilon - \chi_k)dv| = -\frac{1}{\varepsilon}|u_\varepsilon - k|$ car $\int_{\mathbb{R}} \chi_k(v)dv = k$.

Ainsi, on obtient ce que nous appellerons les inégalités d'entropie suivantes :

$$\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv \leq 0.$$

□

Lemme 4.

Soit $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_t^+; L^1(\mathbb{R}_v; L^\infty(\mathbb{R}_x^d)))$ la solution de l'équation cinétique (7) avec pour donnée initiale $f_\varepsilon(x,v,0)$ à support compact dans $\mathbb{R}_v$. Alors pour tout k, k réel, on a

$$\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv - |u_\varepsilon - k| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{48}$$

dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$ et pour tout $b(.) \in L^\infty(\mathbb{R}_v)$,

$$\int_v b(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv - sgn(u_\varepsilon - k)\int_v b(v)(f_\varepsilon - \chi_k)dv \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{49}$$

dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$.

Preuve du Lemme : D'après le lemme précédent, on a l'inégalité

$$\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv \leq -\frac{1}{\varepsilon}[\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv - |u_\varepsilon - k|] \tag{50}$$

d'où en intégrant, on a

$$\begin{array}{rcl}
0 & \leq & \int_0^T \int_{-X}^X [\int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv - |u_\varepsilon - k|]dxdt\\
& \leq & -\varepsilon \int_0^T \int_{-X}^X (\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k|dv + \partial_x \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k|dv)dxdt\\
& \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} & 0
\end{array}$$

d'où la convergence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv - |u_\varepsilon - k| &= \int_v sgn(f_\varepsilon - \chi_k)(f_\varepsilon - \chi_k) dv - sgn(u_\varepsilon - k) \int_v (f_\varepsilon - \chi_k) dv \\ &= \int_v (f_\varepsilon - \chi_k) s(v) dv \end{aligned}$$

où $s(v) = s(v, x, t)$ est la fonction caractéristique $s(v) = sgn(f_\varepsilon(x, v, t) - \chi_k(v)) - sgn(u_\varepsilon(x, t) - k)$.

On sait que $s(v)$ est à support dans $V = \{v | sgn(f_\varepsilon - \chi_k) \neq sgn(u_\varepsilon - k)\}$ et $sgn(f_\varepsilon - \chi_k).s(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Alors $\int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv - |u_\varepsilon - k| = \int_{v \in V} |f_\varepsilon - \chi_k| sgn(f_\varepsilon - \chi_k) s(v) dv = 2 \int_{v \in V} |f_\varepsilon - \chi_k| dv$. Ainsi, d'après ce que l'on vient d'établir on a

$$\int_{v \in V} |f_\varepsilon - \chi_k| dv \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{51}$$

dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$. Enfin, si $b \in L^\infty(\mathbb{R}_v)$, on a

$$\begin{aligned} \int_v b(v)|f_\varepsilon - \chi_k| dv - sgn(u_\varepsilon - k) \int_v b(v)(f_\varepsilon - \chi_k) dv &= \int_v b(v)(f_\varepsilon - \chi_k) s(v) dv \\ &= 2 \int_{v \in V} b(v) |f_\varepsilon - \chi_k| dv \\ &\leq 2 \sup_v b(v) \int_{v \in V} |f_\varepsilon - \chi_k| dv \end{aligned}$$

d'où la convergence dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$. □

Armé de ces deux lemmes et de la compacité par compensation, nous pouvons à présent démontrer le théorème d'existence

Preuve du Théorème : En intégrant par rapport à v l'équation (45), on obtient

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x \int_v a(v) f_\varepsilon dv = 0. \tag{52}$$

De plus d'après le lemme 3, on a l'inégalité

$$\partial_t \int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv + \partial_x \int_v a(v) |f_\varepsilon - \chi_k| dv \leq 0. \tag{53}$$

Alors d'après les inégalités (41) et (42), les membres de gauche des deux égalité-inégalité (52) et (53) appartiennent à $W^{-1,\infty}$. De plus, le premier est une mesure nulle donc bornée et le second est une mesure et est bornée dans $\mathcal{D}'$ (car borné dans $W^{-1,\infty}$) donc c'est également une mesure bornée. Ainsi, d'après le lemme de Murat, ils appartiennent à $H^{-1}_{loc}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t^+)$.

On peut alors appliquer le lemme divergence-rotationnel et on obtient pour une sous-suite

$$\overline{u_\varepsilon . \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k| dv} - \overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv . \int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv} = \overline{u_\varepsilon} . \overline{\int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k| dv} - \overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv} . \overline{\int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv} \tag{54}$$

où la barre signifie la limite faible-$*$ dans L^∞.
On admettra que suite aux méthodes développées dans [8], on peut réécrire cette égalité comme suit

$$\overline{(u_\varepsilon - \overline{u_\varepsilon}) . \int_v a(v)|f_\varepsilon - \chi_k| dv} = \overline{\overline{\int_v |f_\varepsilon - \chi_k| dv} . (\int_v a(v) f_\varepsilon dv - \overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv})}. \tag{55}$$

Enfin, d'après le lemme 4, l'égalité précédente devient

$$\overline{(u_\varepsilon - \overline{u_\varepsilon}). sgn(u_\varepsilon - k) \int_v a(v)(f_\varepsilon - \chi_k) dv} = \overline{\overline{|u_\varepsilon - k|} . (\int_v a(v) f_\varepsilon dv - \overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv})}. \tag{56}$$

On fixe alors(x, t) et on pose $k = \overline{u_\varepsilon}(x, t)$, alors après réarrangement, on obtient

$$\overline{|u_\varepsilon - \overline{u_\varepsilon}| . (\int_v a(v) \chi_k dv - \overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv})} = 0. \tag{57}$$

De plus, on a $f_\varepsilon - \chi_{u_\varepsilon} = -\varepsilon[\partial_t + a(v)\partial_x] f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ dans $\mathcal{D}'$. Ainsi, $\overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv} = \overline{\int_v a(v) \chi_{u_\varepsilon} dv}$. Or, on rappelle que $\int_v a(v) \chi_\rho(v) dv = A(\rho)$, d'où $\overline{\int_v a(v) f_\varepsilon dv} = \overline{\int_v a(v) \chi_{u_\varepsilon} dv} = \overline{A(u_\varepsilon)}$. De même, on a $\int_v a(v) \chi_k dv = A(k) = A(\overline{u_\varepsilon})$ dans notre cas. Ainsi, d'après (57), on a

$$\overline{|u_\varepsilon - \overline{u_\varepsilon}| . (A(\overline{u_\varepsilon}) - \overline{A(u_\varepsilon)})} = 0. \tag{58}$$

Ainsi, par des raisonnements du type Tartar que nous admettrons, cela nous conduit à $\overline{A(u_\varepsilon)} = A(\overline{u_\varepsilon})$.

Par passage à la limite faible dans (45) après intégration, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u_\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x}A(\overline{u_\varepsilon}) = 0. \tag{59}$$

Ainsi $u_\varepsilon(x,t)$ converge vers une solution faible de la loi de conservation (44) que l'on note u.

De plus, A étant non linéaire, en faisant appel à la théorie des mesures de Young on montre que $u_\varepsilon(x,t)$ converge en fait fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_t)$,$1 \leq p < \infty$. En effet, notons μ la mesure de Young associée à la suite (u_ε). On a $u_\varepsilon \rightharpoonup u = \int \lambda d\mu(\lambda) =< \mu, \lambda >$ et $A(u_\varepsilon) \rightharpoonup \xi =< \mu, A(\lambda) >$ et d'après ce que l'on vient d'établir $\xi = A(u)$. De plus, en appliquant le lemme rotationnel-divergence à nouveau, on obtient :

$$\begin{aligned}
&< \mu, \lambda\, sgn(\lambda - k)(A(\lambda) - A(k)) - |\lambda - k| A(\lambda) > \\
&=< \mu, \lambda >< \mu, sgn(\lambda - k)(A(\lambda) - A(k)) > - < \mu, |\lambda - k| >< \mu, A(\lambda) > .
\end{aligned}$$

On cherche alors à montrer que $Conv(supp\mu) = [\alpha, \beta]$ est réduit à un point afin de pouvoir appliquer la proposition 1. Par une translation, on peut se ramener au cas de figure où $u = A(u) = 0$. On définit M et N par 0 hors de $[\alpha, \beta]$ et tel que $M' = \lambda\mu$, $N' = A(\lambda)\mu$. Alors la relation $< \mu, \lambda\, sgn(\lambda-k)(A(\lambda)-A(k))-|\lambda-k|A(\lambda) >= 0$ devient $< M', sgn(\lambda-k)(A(\lambda)-A(k)) >=< N', |\lambda-k| >$ ou encore $< MA'(\lambda) - N, \Phi(\lambda) >= 0$ avec $\Phi(\lambda) = \partial_\lambda|\lambda - k|$. Cette relation peut alors être étendue au fonction à support compact et donc $MA'(\lambda) - N = 0$. De plus, par définition, $N'\lambda = M'A(\lambda)$ et donc $(AM-\lambda N)' = 0$. Et ainsi, $AM-\lambda N = 0$ et donc $A-\lambda A' = 0$. On en déduit donc que $A(\lambda) = K\lambda$ sur $[\alpha, \beta]$, K étant une constante. Or par hypthèse, il n'existe pas d'intervalle sur lequel A est linéaire, donc μ est une mesure de Dirac et ainsi d'après la proposition 1,u_ε converge fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_t)$,$1 \leq p < \infty$ pour la suite extraite.

On peut alors passer à la limite dans (53) et obtenir l'inégalité entropique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}|u - k| + \frac{\partial}{\partial x}[sgn(u - k)(A(u) - A(k))] \leq 0. \tag{60}$$

Or ayant pour donnée initiale $u_0(x)$, la solution entropique de (44) est unique et ainsi, on peut conclure que toute la suite $u_\varepsilon(x,t)$ converge fortement dans $L^p_{loc}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}^+_t)$, $p < \infty$ vers l'unique solution entropique de (44). □

3 Compacité par compensation stochastique

3.1 Théorème Rotationnel-Divergence

Tout comme dans le cadre déterministe, on obtient des informations sur la limite avec des fonctions non linéaires par le biais de la compacité par compensation que nous généralisons ici au cadre stochastique.

On suppose que $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ est un ouvert borné avec un bord $\partial\mathcal{O}$ régulier $\mathcal{C}^\infty$. Pour $F = (F_1, \ldots, F_m) \in L^2(\mathcal{O}; \mathbb{R}^m)$ on définit rotationnel de F comme précédemment : $rotF = \nabla \times F$ est une fonction à valeurs dans les matrices de taille $m \times m$ dont la (i,j)-ième composante est définie par $(\nabla \times F)_{ij} = \partial_{x_j}F_i - \partial_{x_i}F_j \in H^{-1}(\mathcal{O})$.

Soit X_ε, X des variables aléatoires à valeurs dans S un espace métrisable séparable complet. On notera $\lim_{\varepsilon \to 0^+} X_\varepsilon \stackrel{\mathcal{L}}{=} X$ la convergence en loi de X_ε vers X. On définit également une partie tendue.

Définition 5.
Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des probabilités sur $(E, \mathcal{E})$. Une partie A de $\mathcal{P}(E)$ est tendue si pout tout $\delta > 0$, il existe un compact K_δ de E tel que, pour tout $\mathbb{P} \in A$, on ait $\mathbb{P}(K^c_\delta) \leq \varepsilon$.

On rappelle alors le résultat suivant que nous utiliserons par la suite :

Proposition 2 (Prokhorov).
Une famille de mesures de probabilité sur (S,d) séparable complet est tendue si et seulement si de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge étroitement.

Ainsi, dans notre cadre, “la suite $\{X_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est tendue” signifie en fait la famille des probabilités associées est tendue, et alors d'après la propriété précédente, sur un espace métrique séparable complet, il existe une sous-suite de $\{X_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ qui converge en loi.

On peut alors établir le théorème suivant :

Théorème 7 (Rotationnel-Divergence).

Soit $(G\varepsilon, H\varepsilon)$,$\varepsilon > 0$,$(\bar{G}, \bar{H})$ une suite de variable aléatoire à valeurs dans $L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m) \times L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$. On suppose que

1. *$\{G_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ et $\{H_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ sont deux suites bornées stochastiquement à valeurs dans $L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ i.e. pour tout $\delta > 0$ il existe une constante déterministe $C_\delta \in (0,\infty)$ telle que*

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|G_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)} + \|H_\varepsilon\|_{L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)}) > C_\delta) < \delta. \tag{61}$$

2. *Pour tout $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$, $k < \infty$,$< .,. >$ crochet de dualité*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(< \Phi_1, G_\varepsilon >, \ldots, < \Phi_k, G_\varepsilon >; < \Phi_1, H_\varepsilon >, \ldots, < \Phi_k, H_\varepsilon >)$$
$$\stackrel{\mathcal{L}}{=}(< \Phi_1, \bar{G} >, \ldots, < \Phi_k, \bar{G} >; < \Phi_1, \bar{H} >, \ldots, < \Phi_k, \bar{H} >). \tag{62}$$

3. *Les suites $\{\nabla.G_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ et $\{\nabla \times H_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ de variables aléatoires à valeurs dans $H^{-1}(\mathcal{O})$ sont tendues.*

Alors pour tout $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$, $k < \infty$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(< \varphi_1, G_\varepsilon.H_\varepsilon >, \ldots, < \varphi_k, G_\varepsilon.H_\varepsilon >) \stackrel{\mathcal{L}}{=}(< \varphi_1, \bar{G}.\bar{H} >, \ldots, < \varphi_k, \bar{G}.\bar{H} >) \tag{63}$$

où la convergence est la convergence en loi jointe avec celle de la condition (2).

Pour ce faire, on démontre dans un premier temps le lemme suivant :

Lemme 5.

Soit $\{(F_\varepsilon, G_\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ et $(\bar{F}, \bar{G})$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^p(\mathcal{O};\mathbb{R}^m) \times H^q(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ où $p = -q \in \{0 \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. On suppose les conditions suivantes

1. *$\{F_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est bornée stochastiquement dans $H^p(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ i.e. pour tout $\delta > 0$, il existe une constante déterministe $C_\delta \in (0,\infty)$ telle que*

$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|F_\varepsilon\|_{H^p} > C_\delta) < \delta. \tag{64}$$

2. *Soit $(.,.)_{H^p}$ le produit scalaire dans $H^p(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$. Pour tout $\Phi_1, \ldots, \Phi_k \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$, $k = 1, 2, \cdots < \infty$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times H^q(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ converge :*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}((\Phi_1, F_\varepsilon)_{H^p}, \ldots, (\Phi_k, F_\varepsilon)_{H^p}, G_\varepsilon) \stackrel{\mathcal{L}}{=}((\Phi_1, \bar{F})_{H^p}, \ldots, (\Phi_k, \bar{F})_{H^p}, \bar{G}). \tag{65}$$

Soit $< .,. >$ le crochet de dualité entre $H^p(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ et $H^q(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$, $p = -q$.

Alors

$$\lim_{\varepsilon\to 0}((\Phi_1, F_\varepsilon)_{H^p}, \ldots, (\Phi_k, F_\varepsilon)_{H^p}; G_\varepsilon; < F_\varepsilon, G_\varepsilon >) \stackrel{\mathcal{L}}{=}((\Phi_1, \bar{F})_{H^p}, \ldots, (\Phi_k, \bar{F})_{H^p}; \bar{G}; < \bar{F}, \bar{G} >). \tag{66}$$

Preuve du Lemme : Le théorème de représentation de Skorohod permet d'affirmer que l'on peut supposer sans perte de généralités que toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité et que toutes les convergences en loi sont en fait des convergences presque sûres.

Donc par hypothèse $G_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} G$ presque sûrement, et donc $G_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\overset{\mathbb{P}}{\longrightarrow}} G$.

Ainsi, $\forall h, \delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}(| < F_\varepsilon, G_\varepsilon - \bar{G} > | > h) &\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}(\|F_\varepsilon\|_{H^p}\|G_\varepsilon - \bar{G}\|_{H^q} > h) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \mathbb{P}(\|G_\varepsilon - \bar{G}\|_{H^q} > hC_\delta^{-1}) + \mathbb{P}(\|F_\varepsilon\|_{H^p} > C_\delta) \\
&< 0 + \delta = \delta.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} | < F_\varepsilon, G_\varepsilon > - < \bar{F}, \bar{G} > | &= | < F_\varepsilon, G_\varepsilon > - < F_\varepsilon, \bar{G} > + < F_\varepsilon, \bar{G} > - < \bar{F}, \bar{G} > | \\ &= | < F_\varepsilon, G_\varepsilon - \bar{G} > + < F_\varepsilon, \bar{G} > - < \bar{F}, \bar{G} > |. \end{aligned}$$

Reste alors à montrer que (à peu de choses près),$< F_\varepsilon, \bar{G} >$ est l'image par une application continue de $\lim_{\varepsilon\to 0}((\Phi_1, F_\varepsilon)_{H^p}, \ldots, (\Phi_k, F_\varepsilon)_{H^p}, G_\varepsilon)$ pour $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$ appropriées et ainsi en faisant appel au résultat suivant, on pourra conclure

Supposons que $(X_1^n, \ldots, X_k^n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_1, \ldots, X_k)$ et soit Φ une application continue. Alors

$$(X_1^n, \ldots, X_k^n, \Phi(X_1^n, \ldots, X_k^n)) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X_1, \ldots, X_k, \Phi(X_1, \ldots, X_k)).$$

Soit $(f_1, \ldots, f_k, \ldots)$ et $(g_1, \ldots, g_k, \ldots)$ les bases orthonormales duales respectives de $H^p(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ et $H^q(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ i.e.

$$< \bar{f}, \bar{g} >= \sum_{k=1}^{+\infty} (\bar{f}, f_k)_{H^p} (\bar{g}, g_k)_{H^q}, \quad \forall \bar{f} \in H^p, \forall \bar{g} \in H^q. \tag{67}$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(| \sum_{k=N+1}^{+\infty} (F_\varepsilon, f_k)_{H^p} (\bar{G}, g_k)_{H^q} |^2 > h) &\leq \lim_{N\to\infty} \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|F_\varepsilon\|_{H^p}^2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} (\bar{G}, g_k)_{H^q}^2 > h) \\ &\leq \lim_{N\to\infty} [\mathbb{P}(\sum_{k=N+1}^{+\infty} (\bar{G}, g_k)_{H^q}^2 > hC_\delta^{-2}) + \sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|F_\varepsilon\|_{H^p} > C_\delta)] \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Et ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} < F_\varepsilon, \bar{G} > &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{N\to\infty} (\sum_{k=1}^{+\infty} (F_\varepsilon, f_k)_{H^p} (\bar{G}, g_k)_{H^q} - \sum_{k=N+1}^{+\infty} (F_\varepsilon, f_k)_{H^p} (\bar{G}, g_k)_{H^q}) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \lim_{N\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\sum_{k=1}^{N} (F_\varepsilon, f_k)_{H^p} (\bar{G}, g_k)_{H^q}) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \lim_{N\to\infty} (\sum_{k=1}^{N} (\bar{F}, f_k)_{H^p} (\bar{G}, g_k)_{H^q}) = < \bar{F}, \bar{G} > \end{aligned}$$

d'après la condition (2) et la convergence en probabilité du reste de la série. □

Ainsi, on peut à présent démontrer le théorème rotationnel-divergence qui nous sera fort utile pour établir l'existence d'une solution entropique forte stochastique.

Preuve du Théorème : Soit h_ε une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ défini comme solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta h_\varepsilon = H_\varepsilon, & x \in \mathcal{O} \\ h_\varepsilon = 0, & x \in \partial\mathcal{O}. \end{cases}$$

D'après les hypothèses, $\{h_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ stochastiquement bornée. Or, tout ensemble borné dans $H^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ est un ensemble compact dans $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$. Par propriété de la compacité, $\{h_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est alors une suite de variables aléatoires à valeurs dans $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ tendue et ainsi quitte à extraire, il existe h_0 une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ tel que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} h_\varepsilon \stackrel{\mathcal{L}}{=} h_0$.

On montre alors en fait que h_0 est à valeurs dans $H^2(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$. On utilise à nouveau le théorème de représentation de Skorohod et on peut donc supposer que $h_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} h_0$ presque sûrement dans L^2 i.e. $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \|h_\varepsilon - h_0\|_{L^2} = 0$ presque sûrement.

Alors par semi-continuité de $\|.\|_{H^2}$,

$$\|h_0(., w)\|_{H^2} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \|h_\varepsilon(., w)\|_{H^2}. \tag{68}$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, il existe $C_\delta > 0$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(\|h_0\|_{H^2} > C_\delta) & \leq & \mathbb{P}(\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\|h_\varepsilon\|_{H^2} > C_\delta) \\ & = & \mathbb{P}(\bigcup_{\mathcal{K}>0}\ \bigcap_{0<\varepsilon<\mathcal{K}}\{\|h_\varepsilon\|_{H^2} > C_\delta\}) \\ & = & \lim_{\mathcal{K}\to 0^+}\mathbb{P}(\bigcap_{0<\varepsilon<\mathcal{K}}\{\|h_\varepsilon\|_{H^2} > C_\delta\}) \\ & \leq & \limsup_{\mathcal{K}\to 0^+}\ \mathbb{P}(\{h_{\mathcal{K}}\|_{H^2} > C_\delta\}) \\ & < & \delta. \end{array} \tag{69}$$

On pose alors $f_\varepsilon = -\nabla.h_\varepsilon$ et $N_\varepsilon = H_\varepsilon - \nabla f_\varepsilon$.

À nouveau, d'après les hypothèses $\{f_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^1(\mathcal{O})$ bornée stochastiquement et comme précédemment, on montre qu'elle est tendue comme suite de variables aléatoires à valeurs dans $L^2(\mathcal{O})$ telle que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon \overset{\mathcal{L}}{=} f_0$.

De plus, par le même genre de manipulations que précédemment, on montre qu'en fait f_0 est à valeurs dans $H^1(\mathcal{O})$.

Enfin, pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$.

$$\begin{array}{rcl} N_\varepsilon^i = H_\varepsilon^i - \partial_{x_i} f_\varepsilon & = & \sum_{j=1}^m -\partial^2_{x_jx_j}h_\varepsilon^i + \partial^2_{x_ix_j}h_\varepsilon^j \\ & = & \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}(\partial_{x_i}h_\varepsilon^j - \partial_{x_j}h_\varepsilon^i) = \sum_{j=1}^m \partial_{x_j}((\nabla\times h_\varepsilon)_{ij}). \end{array} \tag{70}$$

Par hypothèses, $\{\nabla\times h_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^1(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ tendue et donc $\{N_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ telle que $\lim_{\varepsilon\to 0^+} N_\varepsilon \overset{\mathcal{L}}{=} N_0$.

Enfin, les suites $\{h_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, $\{f_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ et $\{\nabla\times h_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ étant tendues, on a, quitte à extraire à nouveau, $\lim_{\varepsilon\to 0^+}(h_\varepsilon, f_\varepsilon, N_\varepsilon) \overset{\mathcal{L}}{=} (h_0, f_0, N_0)$ où $(h_\varepsilon, f_\varepsilon, N_\varepsilon)$ variable aléatoire à valeurs dans $E = L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)\times L^2(\mathcal{O})\times L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$.

De plus, $(-\Delta) : L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m) \to H^{-2}(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ est une application continue et donc $\lim_{\varepsilon\to 0^+} H_\varepsilon \overset{\mathcal{L}}{=} H_0$ où H_0 est telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta h_0 = H_0, & x\in\mathcal{O} \\ h_0 = 0, & x\in\partial\mathcal{O} \end{array}\right.$$

et ainsi H_0 est une variable aléatoire à valeurs dans $L^2(\mathcal{O};\mathbb{R}^m)$ et donc d'après la condition (2), $\bar{H} \overset{\mathcal{L}}{=} H_0$.

À nouveau, d'après le théorème de représentation de Skorohod, on peut supposer que l'on ait dans le même espace de probabilité et que les convergences sont des convergences presque sûre. Alors $f_0 = -\nabla h_0$, $N_0 = H_0 - \nabla f_0$.

Enfin, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$ déterministe,

$$\begin{array}{rcl} \int G_\varepsilon.H_\varepsilon\varphi dx & = & \int G_\varepsilon.(N_\varepsilon + \nabla f_\varepsilon)\varphi \\ & = & < G_\varepsilon, N_\varepsilon\varphi > - < G_\varepsilon, (\nabla\varphi)f_\varepsilon > - < \nabla.G_\varepsilon, f_\varepsilon\varphi > . \end{array} \tag{71}$$

On est alors, d'après les hypothèses et les convergences établies, dans le cadre d'utilisation du lemme pour établir la convergence des crochets et ainsi

$$\begin{array}{rcl} \lim_{\varepsilon\to 0^+} < \varphi, G_\varepsilon.H_\varepsilon > & \overset{\mathcal{L}}{=} & < \bar{G}, N_0\varphi > - < \bar{G}, (\nabla\varphi)f_0 > - < \nabla.\bar{G}, f_0.\varphi > \\ & = & \bar{G}.(N_0 + \nabla f_0)\varphi dx \\ & = & < \varphi, \bar{G}.\bar{H} > . \end{array} \tag{72}$$

□

3.2 Lemme de Murat

Enfin, dans la pratique, pour vérifier les conditions d'utilisation du théorème rotationnel-divergence, on fait appel au lemme suivant :

Lemme 6.

On suppose

1. $\{\Phi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *est une suite bornée stochastiquement à valeurs dans* $W^{-1,p}(\mathcal{O})$ *pour* $p > 2$ *i.e. pour tout* $\delta > 0$*, il existe une constante* $C_\delta \in (0, \infty)$ *telle que*
$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|\Phi_\varepsilon\|_{W^{-1,p}} > C_\delta) < \delta. \tag{73}$$
2. $\Phi_\varepsilon = \chi_\varepsilon + \Psi_\varepsilon$.
3. $\{\chi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *est une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $H^{-1}(\mathcal{O})$ *tendue.*
4. $\{\Psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *est une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'espace des mesures de Radon* $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ *bornée stochastiquement en norme de variation totale* $\|.\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})}$ *i.e. il existe une constante* $C_\delta \in (0, \infty)$ *telle que*
$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\|\Psi_\varepsilon\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} > C_\delta) < \delta. \tag{74}$$

Alors la suite $\{\Phi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ *est une suite de variables aléatoires à valeurs dans* $H^{-1}(\mathcal{O})$ *tendue.*

Preuve du Lemme : D'après les hypothèses, pour tout $\delta > 0$, il existe $C_{1,\delta}, C_{2,\delta} > 0$ et un ensemble compact déterministe $K_{1,\delta} \subset H^{-1}(\mathcal{O})$ tel que $\inf_{\varepsilon} \mathbb{P}(\Omega_{\varepsilon,\delta}) > 1 - \delta$ où

$$\Omega_{\varepsilon,\delta} = \{w \in \Omega : \|\Phi_\varepsilon(.,w)\|_{W^{-1,p}} \le C_{1,\delta}\} \cap \{w \in \Omega : \chi_\varepsilon(.,w) \in K_{1,\delta}\} \cap \{w \in \Omega : \|\Psi_\varepsilon(.,w)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} \le C_{2,\delta}\}$$

On rappelle que l'inclusion de $\mathcal{M}(\mathcal{O})$ dans $W^{-1,q}(\mathcal{O})$ est compacte pour tout $q \in (1, \frac{m}{m-1})$.

Et ainsi, il existe un compact déterministe $K_{2,\delta} = K_{2,\delta}(C_{2,\delta}) \subset W^{-1,q}(\mathcal{O})$ tel que :

$$\{w \in \Omega : \|\Psi_\varepsilon(.,w)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} \le C_{2,\delta}\} \subset \{w \in \Omega : \Psi_\varepsilon(.,w) \in K_{2,\delta}\}.$$

On définit $g_\varepsilon, h_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\mathcal{O})$ comme les solutions faibles de

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta g_\varepsilon = \chi_\varepsilon & \text{sur} & \mathcal{O} \\ g_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{O} \end{array} \right. \qquad \textit{et} \qquad \left\{ \begin{array}{lll} -\Delta h_\varepsilon = \Psi_\varepsilon & \text{sur} & \mathcal{O} \\ h_\varepsilon = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{O} \end{array} \right.$$

et on note $f_\varepsilon = g_\varepsilon + h_\varepsilon$.

Alors par des résultats de théorie elliptique, il existe un compact déterministe $K_{3,\delta} = K_{3,\delta}(K_{1,\delta}) \subset W_0^{1,2}(\mathcal{O})$ et un compact déterministe $K_{4,\delta} = K_{4,\delta}(K_{2,\delta}) \subset W_0^{1,q}(\mathcal{O})$ tel que

$$\begin{array}{c} \{w : \chi_\varepsilon(.,w) \in K_{1,\delta}\} \subset \{w : g_\varepsilon(.,w) \in K_{3,\delta}\} \\ \{w : \Psi_\varepsilon(.,w) \in K_{2,\delta}\} \subset \{w : h_\varepsilon(.,w) \in K_{4,\delta}\}. \end{array}$$

Et donc, comme $f_\varepsilon = g_\varepsilon + h_\varepsilon$, il existe un ensemble compact déterministe $K_{5,\delta} \subset W_0^{1,q}(\mathcal{O})$ tel que

$$\{w : \chi_\varepsilon(.,w) \in K_{1,\delta}\} \cap \{w : \|\Psi_\varepsilon(.,w)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} \le C_{2,\delta}\} \subset \{w : f_\varepsilon(.,w) \in K_{5,\delta}\}.$$

Or, on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta f_\varepsilon = \Phi_\varepsilon, & x \in \mathcal{O} \\ f_\varepsilon = 0, & x \in \partial\mathcal{O} \end{array} \right.$$

et ainsi, on a l'inclusion suivante

$$\begin{array}{rcl} \{w : \chi_\varepsilon(.,w) \in K_{1,\delta}\} \cap \{w : \|\Psi_\varepsilon(.,w)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} \le C_{2,\delta}\} & \subset & \{w : f_\varepsilon(.,w) \in K_{5,\delta}\} \\ & \subset & \{w : \Phi_\varepsilon(.,w) \in K_{6,\delta}\} \end{array}$$

où $K_{6,\delta} = K_{6,\delta}(K_{5,\delta})$ est un compact déterministe inclus dans $W_0^{-1,q}(\mathcal{O})$.

Et donc par interpolation entre $W_0^{-1,q}(\mathcal{O})$ et $W_0^{-1,p}(\mathcal{O})$, il existe un ensemble compact déterministe $K_{7,\delta} = K_{7,\delta}(K_{6,\delta}, C_{1,\delta}) \subset H^{-1}(\mathcal{O})$ tel que

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{\varepsilon,\delta} & = & \{w \in \Omega : \|\Phi_\varepsilon(.,w)\|_{W^{-1,p}} \le C_{1,\delta}\} \cap \{w : \chi_\varepsilon(.,w) \in K_{1,\delta}\} \cap \{w \in \Omega : \|\Psi_\varepsilon(.,w)\|_{\mathcal{M}(\mathcal{O})} \le C_{2,\delta}\} \\ & \subset & \{w \in \Omega : \|\Phi_\varepsilon(.,w)\|_{W^{-1,p}} \le C_{1,\delta}\} \cap \{w : \Phi_\varepsilon(.,w) \in K_{6,\delta}\} \\ & \subset & \{w : \Phi_\varepsilon(.,w) \in K_{7,\delta}\}. \end{array}$$

Ainsi, $\inf_{\varepsilon>0} \mathbb{P}(\Phi_\varepsilon \in K_{7,\delta}) > 1 - \delta$ d'où $\{\phi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est bien une suite tendue. □

4 Existence d'une solution entropique forte stochastique

4.1 Approche heuristique

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour prouver le théorème 2.

On va cette fois considérer le système avec un terme de viscosité.

$$\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = \int_{z\in Z} \sigma(x,u(t,x);z)\partial_t W(t,dz) + \varepsilon\Delta_{xx}u(t,x), \qquad u(0)=u_0. \tag{75}$$

Le terme $\varepsilon\Delta_{xx}$, $\varepsilon > 0$ a un effet régularisant sur la solution u.

Si l'on se place dans le cadre où $u = u_\varepsilon$ est une solution de (75) qui est suffisamment régulière pour que les dérivées spatiales jusqu'à l'ordre 2 au sens classique existent et soient continues, alors soit $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_d)$ un couple entropie-flux d'entropie, par la formule d'Itô, on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t \Phi(u(t,x)) + div_x \Psi(u(t,x)) = &\int_{z\in Z} \Phi'(u(t,x))\sigma(x,u(t,x);z)\partial_t W(t,dz)\\ &+ \varepsilon\Phi'(u(t,x))\Delta_{xx}u(t,x) + \frac{1}{2}\Phi''(u(t,x))\int_z \sigma^2(x,u(t,x);z)\mu(dz).\end{aligned} \tag{76}$$

En effet, (75) équivaut à

$$d_t u(t,x) = (\varepsilon\Delta_{xx}u(t,x) - div_x F(u(t,x))dt + \int_{z\in Z} \sigma(x,u(t,x);z)W(dt,dz). \tag{77}$$

On applique la formule d'Itô à $\Phi(u(t,x))$

$$\begin{aligned}d_t\Phi(u(t,x)) = &\Phi'(u(t,x))(\varepsilon\Delta_{xx}u(t,x) - div_x F(u(t,x)))dt\\ &+ \Phi'(u(t,x))\int_{z\in Z} \sigma(x,u(t,x);z)W(dt,dz) + \frac{1}{2}\Phi''(u(t,x))\int_z \sigma^2(x,u(t,x);z)\mu(dz)dt\end{aligned} \tag{78}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi(u(t,x)) + \Phi'(u(t,x))div_x F(u(t,x)) = &\Phi'(u(t,x))\int_{z\in Z} \sigma(x,u(t,x);z)\partial_t W(t,dz)\\ &+ \varepsilon\Phi'(u(t,x))\Delta_{xx}u(t,x) + \frac{1}{2}\Phi''(u(t,x))\int_z \sigma^2(x,u(t,x);z)\mu(dz).\end{aligned} \tag{79}$$

Or $\Psi_k'(r) = \Phi'(r)(F_k)'(r) \quad \forall k$, d'où la formule (76).

Il est alors tentant de faire tendre ε vers 0 pour passer à la limite, mais ce n'est pas correct.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut établir des informations sur les dérivées d'ordre 2 de u en exploitant l'effet régularisant de $\varepsilon\Delta$. Toutefois, on ne sait pas évaluer la fluctuation du terme non linéaire $\varepsilon\Phi'(u(t,x))\Delta_{xx}u(t,x)$ quand ε tend vers 0 (on note que $u = u_\varepsilon$).

On fait alors la manipulation suivante, on observe que

$$\varepsilon\Phi'(u(t,x))\Delta_{xx}u(t,x) = \varepsilon\Delta_{xx}\Phi(u(t,x)) - \varepsilon\Phi''(u(t,x))|\nabla_x u(t,x)|^2 \tag{80}$$

quitte à considérer $\Delta_{xx}\Phi(u(t,x))$ au sens des distributions pour u localement intégrable.

Dans la pratique, on se rend compte que l'on n'a pas de contrôle sur $|\nabla_x u(t,x)|$ uniformément en $\varepsilon > 0$, et qu'il n'est pas raisonnable d'espérer en avoir, cette quantité peut exposer en temps fini même si $u(0) \in \mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{C}_b$ pour $\sigma = 0$ par exemple.

Cependant, pour $(\Phi, \Psi) \in \mathcal{K}$ on sait que Φ est convexe i.e. $\Phi'' \geq 0$ donc pour $\varphi \geq 0$, on a $< \varepsilon\Phi''(u)|\nabla_x u|^2, \varphi >\geq 0$.

Donc pour $0 \leq \varphi \in \mathcal{C}_c^2$, on a

$$
\begin{aligned}
&< \Phi(u(t,.)), \varphi > - < \Phi(u(s,.)), \varphi > \\
&= \int_s^t < \Psi(u(r,.)), \nabla_x \varphi > dr + \int_{(s,t]\times Z} \frac{1}{2} < \Phi''(u(r,.))\sigma^2(.,u(r,.);z), \varphi > \mu(dz)dr \\
&\quad + \varepsilon \int_s^t (< \Phi(u(r,.)), \Delta\varphi > - < \Phi''(u(r,.))|\nabla_x u(r,.)|^2, \varphi >)dr \\
&\quad + \int_{(s,t]\times Z} < \Phi'(u(r,.))\sigma(.,u(r,.);z), \varphi > W(dr,dz) \\
&\leq \int_s^t < \Psi(u(r,.)), \nabla_x \varphi > dr + \int_{(s,t]\times Z} \frac{1}{2} < \Phi''(u(r,.))\sigma^2(.,u(r,.);z), \varphi > \mu(dz)dr \\
&\quad + o(\varepsilon) + \int_{(s,t]\times Z} < \Phi'(u(r,.))\sigma(.,u(r,.);z), \varphi > W(dr,dz). \qquad (81)
\end{aligned}
$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtiendrait (29). Néammoins, deux problèmes se posent pour rendre cela rigoureux. Tout d'abord, on a besoin de régularité pour la solution u de l'équation approchée afin de pouvoir appliquer la formule d'Itô. Enfin, on a besoin de compacité sur $u = u_\varepsilon$ quand ε tend vers 0. Concernant, ce dernier point on fait appel aux arguments de compacité par compensation évoqués précédemment, restreignant ainsi nos considérations à la dimension 1. On souligne toutefois que les estimations établies restent elles valables en toute dimension.

Le but des parties qui vont suivre n'est donc pas de démontrer tous les résultats énoncés mais de donner les grandes lignes menant à la construction de cette solution entropique forte stochastique. En particulier, on ne démontrera pas les estimations, cela étant souvent très calculatoire et technique, on jugera ici que l'important est de comprendre en quoi ces estimations sont nécessaires et où elles interviennent. On note que l'on s'attardera tout de même sur les applications de la compacité par compensation stochastique.

4.2 Existence et régularité de la solution approchée

Nous allons dans un premier temps procéder à la construction de la solution approchée.
On supposera à présent les conditions 1. On suppose de plus que $F = (F_1, \dots, F_d)$ satisfait $F_k \in \mathcal{C}^\infty$ pour tout k et que les dérivées d'ordre m de F_k satisfont $|F_k^{(m)}(r)| \leq C_m < \infty$, $m = 0, 1, \dots$; $\sigma(x,u;z)$,$D_x^m\sigma(x,u;z)$ et $\partial_u^m\sigma(x,u;z)$ existent, sont continus et uniformément bornées et $D_x^m\sigma(.,u;z) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et enfin $\int_Z \sup_{x,u} |\sigma^2(x,u;z)|\mu(dz) < \infty$.

On note $G(t,x) = G_\varepsilon(t,x) = \frac{1}{(4\pi\varepsilon t)^{d/2}} e^{-|x|^2/(4\varepsilon t)}$, $t > 0$ la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On suppose $\mathbb{E}[\|u_0\|_2^2] < \infty$. On définit des approximations successives de (75).

$$
\begin{aligned}
&u^0(t,x) = u_0(x), u^n(0,x) = u_0(x) \\
&du^n(t,x) + \nabla.F(u^{n-1}(t,x))dt = \varepsilon\Delta u^n(t,x)dt + \textstyle\int_Z \sigma(x,u^{n-1}(t,x);z)W(dt,dz).
\end{aligned} \qquad (82)
$$

On admettra que l'expression suivante est solution de l'équation (82) :

$$
\begin{aligned}
u^n(t,x) = &\int_y G(t,x-y)u_0(y)dy - \int_0^t \int_y G(t-s,x-y) \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} F_i(u^{n-1}(s,y))dyds \\
&+ \int_{(0,t]\times Z} \int_y G(t-s,x-y)\sigma(y,u^{n-1}(s,y);z)dyW(ds,dz). \qquad (83)
\end{aligned}
$$

Le membre de droite de (83) est bien défini au regard de nos suppositions précédentes et si l'on rajoute que $D_y u^{n-1} \in L^\infty([0,T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ pour tout $T > 0$. Toutefois à ce stade du problème, on ne peut justifier que la définition de u^1. En effet, on a besoin d'informations sur la régularité de u^{n-1} pour conclure que u^n est bien défini pour $n \geq 2$.

Il faut alors faire appel à un raisonnement par récurrence et utiliser des inégalités de type Morrey et Sobolev sur des processus adaptés précis pour établir le résultat suivant :

Proposition 3.
Pour tout $n = 1, 2, \dots$, on a $u^n(t) \in \mathcal{C}([0,T], H^p(\mathbb{R}^d))$ pour $p = 1, 2, \dots$, et $u^n(t,.) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), t > 0$.

Il s'agit alors de démontrer la convergence de u^n au sens approprié vers un processus limite. A l'aide de la formule d'Itô, on obtient des estimations nous permettant d'établir qu'il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté u à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \geq 2$, satisfaisant $\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\|u(t) - u^n(t)\|_p^p] = 0$, avec $\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\|u(t)\|_p^p] < \infty$. Ce processus est une solution de (75) et a pour expression

$$u(t,x) = \int_y G(t, x-y)u(0,y)dy - \int_0^t \int_y G(t-s, x-y) \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} F_i(u(s,y))dyds$$
$$+ \int_{(0,t]\times Z} \int_y G(t-s, x-y)\sigma(y, u(s,y); z)dyW(ds,dz). \quad (84)$$

Or des questions de régularités de u à $\varepsilon > 0$ fixé, s'étaient posées, notamment pour pouvoir appliquer la formule d'Itô. On peut en fait montrer a posteriori que $u \in \mathcal{C}([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^d))$ pour tout $d = 1, 2, \ldots$ et même plus $\partial_{ij} u = \partial_{x_i x_j} u(t,.) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, d$. Finalement, u est une solution forte de (75) au sens classique.
De plus, on a alors les justifications pour appliquer la formule d'Itô évoquée dans la partie 4.1 et pour $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ convexe, on obtient bien l'inégalité (81).

Nous avons donc établi l'existence et la régularité de la solution approchée. Il s'agit à présent de passer à la limite sur ε. Dans un premier temps, on établit alors des estimations uniformes en ε pour les solutions de (75). On note à présent $u_\varepsilon, F_\varepsilon, \sigma_\varepsilon$ pour souligner la dépendance en ε et on suppose $\sup_\varepsilon \mathbb{E}[\|u_\varepsilon(0)\|_p^p + \|u_\varepsilon(0)\|_2^p] < \infty$, $p = 1, 2, \ldots$ et $\sup_{\varepsilon>0} |\sigma_\varepsilon(x, u; z)| \leq f(x)(1 + |u|)M(z)$ où $\int_Z M^4(z)\mu(dz)$ $< \infty$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Alors on obtient les estimations suivantes :

Lemme 7.

1. *pour tout* $p = 2, 4, 6, \ldots$
$$\sup_\varepsilon \sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\|u_\varepsilon(t,.)\|_p^p] < \infty. \quad (85)$$
2. *pour tout* $p = 1, 2, \ldots$
$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}[(\varepsilon \int_0^T \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_2^2 dt)^p] < \infty \quad (86)$$
et
$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}[(\int_0^T \int_z \int_x \sigma_\varepsilon^2(x, u_\varepsilon(s,x); z)dx\ \mu(dz)\ ds)^p] < \infty. \quad (87)$$
3. *Soit* $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *avec* Φ, Φ', Φ'' *ayant au moins une croissance polynomiale* (Φ *n'est pas forcément convexe), alors*
$$\sup_{\varepsilon>0} \mathbb{E}[|\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \Phi''(u_\varepsilon(t,x))|\nabla_x u_\varepsilon(t,x)|^2 dx\ dt|^p] < \infty \quad (88)$$
$p = 1, 2, \ldots; T > 0.$

4.3 Convergence de $\{u_\varepsilon(t,x) : \varepsilon > 0\}$

Dans le cadre déterministe, pour traiter la convergence d'équations aux dérivées partielles non linéaires, on faisait appel à la théorie des mesures de Young, notamment dans la proposition 1 où l'on cherchait dans la pratique à démontrer que l'on avait affaire à une mesure de Dirac. Nous allons ici nous en inspirer.

On identifie $u_\varepsilon(t,x)$ avec la fonction à valeurs dans l'espace des mesures aléatoires

$$\nu_\varepsilon(t, x, du) = \delta_{u_\varepsilon(t,x)}(du).$$

On note $\nu_\varepsilon(t) = \nu_\varepsilon(t, dx, du) = \nu_\varepsilon(t, x, du)dx$.

Soit $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ l'espace des mesures de Radon positives ν sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ telles que $\nu(dx, \mathbb{R}) = dx$. On dote alors $\mathcal{M}_0$ de la topologie $\mathcal{T}_0$ suivante : $\nu_n \to \nu$ dans $\mathcal{M}_0$ si et seulement si $< f, \nu_n > \to < f, \nu >$ pour tout $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ satisfaisant $f(u,x) = 0$ pour $|x| > k$ pour $k > 0$. $(\mathcal{M}_0, \mathcal{T}_0)$ est un espace métrisable. En effet, on note pour $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_0$

$$\Pi^{\nu_1,\nu_2} = \{\pi \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})|\ \pi(dx, du; \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) = \nu_1(dx, du); \pi(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; dy, dv) = \nu_2(dy, dv)\}. \quad (89)$$

On pose $r(\nu_1,\nu_2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\frac{q_k(\nu_1,\nu_2)}{1+q_k(\nu_1,\nu_2)}$ où $q_k^2(\nu_1,\nu_2)=\inf\{\int_{|x|\leq k,|y|\leq k}(|x-y|^2+|u-v|^2\wedge 1)$ $\pi(dx,du;dy,dv):\pi\in\Pi^{\nu_1,\nu_2}\}$.
$(\mathcal{M}_0,r)$ est alors un espace métrique séparable complet. $\nu_\varepsilon(t)$ est à trajectoire continue dans $\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{M}_0)$ $\subset M([0,\infty);\mathcal{M}_0)$ où $M([0,\infty);\mathcal{M}_0)$ est l'espace des processus à valeurs dans $\mathcal{M}_0$, Borel-mesurable dont la topologie est donnée par la métrique suivante $d(\nu_1(.),\nu_2(.))=\int_0^\infty e^{-t}(1\wedge r(\nu_1(t),\nu_2(t))dt$.
$(M([0,\infty);\mathcal{M}_0),d)$ est un espace métrique séparable complet.

On suppose à présent les conditions 2 pour σ et F (sauf $d=1$) et $\mathbb{E}[\|u_0\|_p^p]<+\infty$, $p=1,2,\ldots$.
On suppose également que σ_ε et F_ε sont des approximations particulières de σ et F qui vérifient les conditions requises au début de la partie 4.2 et que les erreurs dûes aux approximations sont majorées par ε (à une constante multplicative près). Alors on peut établir le résultat suivant :

Lemme 8.
Il existe un processus $\mathcal{F}_t$-adapté $\nu_0(.)$ à trajectoires dans l'espace métrique $(M([0,\infty);\mathcal{M}_0),d)$ tel que pour $t\geq 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\mathbb{E}[r(\nu_\varepsilon(t),\nu_0(t))]=0. \tag{90}$$

Ceci implique que la suite de variables aléatoires $\{\nu_\varepsilon(.):\varepsilon>0\}$ à valeurs dans l'espace métrique $(M([0,\infty);\mathcal{M}_0),d)$ converge en probabilité vers $\nu_0(.)$. Ainsi, $\forall 0\leq t_1\leq\cdots\leq t_m$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(\nu_\varepsilon(t_1),\ldots,\nu_\varepsilon(t_m))=(\nu_0(t_1),\ldots,\nu_0(t_m)) \tag{91}$$

en probabilité.

Remarque **:** On a précisé que $\nu_\varepsilon(t)$ est à trajectoire continue dans $\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{M}_0)$. On pourrait alors se demander si l'on ne peut établir $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\nu_\varepsilon=\nu_0$ en probabilité comme variables aléatoires dans $\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{M}_0)$ mais l'on n'arrive pas à le confirmer.

4.4 Applications de la compacité par compensation stochastique

Tout comme dans le cadre déterministe, on va chercher à établir que $\nu_0(t,x,du)$ est une mesure (aléatoire) de Dirac, on pourra alors l'identifier à $u_0(t,x)$.
On suppose à présent $d=1$. On pose $\bar{u}(t,x)=\int_{u\in\mathbb{R}}u\ \nu_0(t,x;du)$. Notre but est alors d'obtenir le résultat suivant :

Lemme 9.
On a $\int_{u\in\mathbb{R}}F(u)\nu_0(t,x;du)dtdx=F(\bar{u}(t,x))dtdx$ presque sûrement.
De plus, si l'ensemble $\{r|F''(r)\neq 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors presque sûrement

$$\nu_0(t,dx,du)=\delta_{\bar{u}(t,x)}(du)dx. \tag{92}$$

On écrit à présent $\nu_\varepsilon(dt,dx,du)=\nu_\varepsilon(t,dx,du)dt$ et ν_ε est alors une mesure aléatoire sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{M}=\mathcal{M}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ l'espace des mesures de Radon positives ν sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ telles que $\nu(dt,dx,\mathbb{R})=dt\times dx$. On dote $\mathcal{M}$ d'une variante de la topologie faible comme suit : $\nu_n\to\nu$ dans $\mathcal{M}_0$ si et seulement si $<f,\nu_n>\to<f,\nu>$ pour tout $f=f(t,x,u)\in F\subset\mathcal{C}_b([0,\infty\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$ où F est l'ensemble des fonctions continues bornées à support compact en t,x,uniformément en u i.e. il existe $C=C_f$ tel que satisfaisant $f(t,x,u)=0$ dès que $t+|x|>C$,$\forall u\in\mathbb{R}$. À nouveau, il existe une topologie métrisable sur $\mathcal{M}$ qui coïncide avec la notion de convergence des suites et fait de $(\mathcal{M},\mathcal{T})$ un espace métrisable séparable complet.
Ainsi, $\{\nu_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}$.

Soit (Φ,Ψ) un couple entropie-flux d'entropie avec Φ,Φ',Φ'' à croissance polynomiale, Φ'', Φ' bornées.
On définit l'intégrale d'Itô

$$M_\varepsilon(t,x)=\int_{[0,t]\times Z}\Phi'(u_\varepsilon(r,x))\sigma_\varepsilon(x,u_\varepsilon(r,x);z)W(dr,dz) \tag{93}$$

et

$$\Phi_\varepsilon(t,x)=\Phi(u_\varepsilon(t,x))\qquad\qquad \Psi_\varepsilon(t,x)=\Psi(u_\varepsilon(t,x)) \tag{94}$$

$$\chi_\varepsilon(t,x) = \chi_{\varepsilon,1}(t,x) + \chi_{\varepsilon,2}(t,x) \qquad \theta_\varepsilon(t,x) = \theta_{\varepsilon,1}(t,x) + \theta_{\varepsilon,2} \tag{95}$$

où $\chi_{\varepsilon,1} = \varepsilon\partial^2_{xx}\Phi(u_\varepsilon(t,x)) = \varepsilon\partial_x(\Phi'(u_\varepsilon(t,x))\partial_x u_\varepsilon(t,x))$
et $\chi_{\varepsilon,2} = \partial_t M_\varepsilon(t,x)$
et $\theta_{\varepsilon,1} = \frac{1}{2}\int_z \Phi''(u_\varepsilon(t,x))\sigma^2_\varepsilon(x,u_\varepsilon(t,x);z)\mu(dz)$
et $\theta_{\varepsilon,2} = -\varepsilon\Phi''(u_\varepsilon(t,x))|\partial_x u_\varepsilon(t,x)|^2$.

On précise le sens de $\chi_{\varepsilon,2}$: $M_\varepsilon(t) = M_\varepsilon(t,x,\omega)$ est une fonction continue en t pour $x,\omega \in \Omega$ fixé. On peut alors prendre la dérivée distribution en t ∂_t de M_ε.

D'après ce que l'on a établi précédemment, on a

$$\partial_t\Phi_\varepsilon(t,x,\omega) + \partial_x\Psi_\varepsilon(t,x,\omega) = \chi_\varepsilon(t,x,\omega) + \theta_\varepsilon(t,x,\omega). \tag{96}$$

On note que ∂_t,∂_x sont à nouveau à comprendre en termes de dérivée de distribution.

Soit $T > 0$, on note $\mathcal{O} = (0,T) \times \mathbb{R}$. On prouve le résultat suivant :

Lemme 10.
$\{\partial_t\Phi_\varepsilon + \partial_x\Psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$ tendue.

Preuve du Lemme : On applique le lemme de Murat stochastique. Pour ce faire, il suffit alors de vérifier les conditions d'utilisation du lemme.

D'après l'estimation (85), $\{\Phi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ et $\{\Psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans $L^p_{loc}(\mathcal{O})$ borné stochastiquement, $2 \leq p < \infty$. Le membre de gauche de (96) est donc borné stochastiquement dans $W^{-1,p}_{loc}(\mathcal{O})$.

De plus, d'après l'estimation (87), $\{\theta_{\varepsilon,1} : \varepsilon > 0\}$ est borné stochastiquement dans $L^2_{loc}(\mathcal{O})$ et donc bornée stochastiquement comme variable aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_{loc}(\mathcal{O})$ (l'espace des mesures de Radon signées sur chaque ouvert borné de $\mathcal{O}$) muni de la norme en variation totale. De même, d'après l'estimation (88), $\{\theta_{\varepsilon,2} : \varepsilon > 0\}$ est bornée stochastiquement (en norme de variation totale) dans $\mathcal{M}_{loc}(\mathcal{O})$.

Enfin, la variable aléatoire à valeurs dans $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$, $\chi_{\varepsilon,1}$ converge en probabilité vers 0 d'après l'estimation (86) et est donc tendue et on admettra que $\{\chi_{\varepsilon,2} : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$ tendue.

On peut alors appliquer le lemme de Murat et $\{\partial_t\Phi_\varepsilon + \partial_x\Psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est une suite de variables aléatoires dans $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$ tendue. □

On va alors identifier $\nu_0(t,x,du)$ à une fonction. Pour $f = f(u)$, on pose $\bar{f} = \bar{f}(t,x) = \int_{u\in\mathbb{R}} f(u)\nu_0(t,x,du)$ quand l'intégrale à un sens. En particulier, $\bar{u}(t,x) = \int_{u\in\mathbb{R}} u\nu_0(t,x,du)$.

Soit (Φ_i,Ψ_i), $i = 1,2$, deux choix de couples entropie-flux d'entropie avec Φ_i au moins à croissance polynomiale, et Ψ_i également.

On peut alors établir le lemme de compacité par compensation stochastique suivant :

Lemme 11.
Pour toute fonction déterministe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathcal{O})$, on a

$$< \varphi, \overline{\Psi_1\Phi_2} - \overline{\Phi_1\Psi_2} > \stackrel{\mathcal{L}}{=} < \varphi, \overline{\Psi_1}.\overline{\Phi_2} - \overline{\Phi_1}.\overline{\Psi_2} > . \tag{97}$$

Preuve du Lemme : Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c((0,T)\times\mathbb{R}^d)$, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int \varphi(t,x)[\Psi_1(u_\varepsilon(t,x))\Phi_2(u_\varepsilon(t,x)) - \Phi_1(u_\varepsilon(t,x))\Psi_2(u_\varepsilon(t,x))]dxdt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi(t,x)\int_u [\Psi_1(u)\Phi_2(u) - \Phi_1(u)\Psi_2(u)]\nu_\varepsilon(t,x,du)dtdx \\ &=< \varphi, \overline{\Psi_1\Phi_2 - \Phi_1\Psi_2} > \end{aligned} \tag{98}$$

d'après la propriété de convergence établie dans la partie 4.3.
De plus, on pose

$$G_\varepsilon(t,x) = (\Phi_1(u_\varepsilon(t,x)),\Psi_1(u_\varepsilon(t,x))) \text{ et } H_\varepsilon(t,x) = (-\Psi_2(u_\varepsilon(t,x)),\Phi_2(u_\varepsilon(t,x))).$$

On vérifie alors les conditions d'utilisation du théorème 7 :

1. D'après la preuve du lemme 10, G_ε et H_ε sont bien stochastiquement bornées comme variables aléatoires à valeurs dans L^2.

2. La propriété de convergence est vérifiée grâce à la convergence de ν_ε.
3. $\nabla . G_\varepsilon = \partial_t \Phi_1 + \partial_x \Psi_1$ et $\nabla \times H_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -(\partial_t \Phi_2 + \partial_x \Psi_2) \\ \partial_t \Phi_2 + \partial_x \Psi_2 & 0 \end{pmatrix}$ sont bien tendues dans $H^{-1}_{loc}(\mathcal{O})$ d'après le lemme 10.

Ainsi, d'après le théorème 7,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \varphi(t,x)[\Psi_1(u_\varepsilon(t,x))\Phi_2(u_\varepsilon(t,x)) - \Phi_1(u_\varepsilon(t,x))\Psi_2(u_\varepsilon(t,x))]dxdt \overset{\mathcal{L}}{=} < \varphi, \overline{\Psi_1}.\overline{\Phi_2} - \overline{\Phi_1}.\overline{\Psi_2} > . \quad (99)$$

D'où la conclusion. $\square$

On peut alors établir le résultat principal de cette partie, le lemme 9.

Preuve du Lemme : Soit φ une application déterministe telle que $0 \leq \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{O})$. On prend $\Phi_1(u) = u, \Psi_1(u) = F(u)$ et $\Phi_2(u) = F(u), \Psi_2(u) = \int_0^u (F')^2(r)dr$.

Alors d'après le lemme précédent,

$$< \varphi, \overline{F^2} - \overline{u\Psi_2} > \overset{\mathcal{L}}{=} < \varphi, (\overline{F})^2 - \overline{u}.\overline{\Psi_2} > . \quad (100)$$

De plus, pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ fixé, et $u \in \mathbb{R}$, par l'inégalité de Schwarz

$$(F(u) - F(\bar{u}(t,x))^2 = (\int_{\bar{u}(t,x)}^u F'(v)dv)^2 \leq (u - \bar{u}(t,x))(\Psi_2(u) - \Psi(\bar{u}(t,x))). \quad (101)$$

On intègre alors l'égalité du dessus par rapport à u contre $\nu_0(t,x,du)$ et on obtient

$$\overline{F^2} + (F(\bar{u}))^2 - 2\bar{F}F(\bar{u}) \leq \overline{u\Psi_2} - \bar{u}.\overline{\Psi_2}. \quad (102)$$

En prenant l'espérance de (100) et (102), on obtient après réécriture

$$\int \varphi(t,x)\mathbb{E}[\bar{F} - F(\bar{u})]^2 dtdx \leq 0, \quad (103)$$

φ étant arbitraire, alors presque sûrement,

$$\bar{F}dtdx = (\int_{\mathbb{R}} F(u)\nu_0(t,x,du))dtdx = (F(\bar{u}(t,x)))dtdx = F(\bar{u})dtdx. \quad (104)$$

De plus,

$$\begin{aligned}
&\int \varphi(t,x)(dtdx) \int_{\omega\in\Omega} \int_{u\in\mathbb{R}} (F(u) - F(\bar{u}(t,x;\omega)))^2 \nu_0(t,x,du;\omega)\mathbb{P}(d\omega) \\
&= \int \varphi(t,x)(dtdx)\mathbb{E}[\overline{F^2} - (F(\bar{u}))^2] \qquad \text{d'après (104)} \\
&= \int \varphi(t,x)(dtdx)\mathbb{E}[\overline{u\Psi_2} - \bar{u}.\overline{\Psi_2}] \qquad \text{d'après (100)} \\
&= \int \varphi(t,x)(dtdx) \int_{\omega\in\Omega} \int_{u\in\mathbb{R}} [(u - \bar{u}(t,x;\omega))(\Psi_2(u) - \Psi_2(\bar{u}(t,x;\omega)))]\nu_0(t,x,du;\omega)\mathbb{P}(d\omega).
\end{aligned}$$

Ainsi, presque sûrement, (101) est une égalité pour tout u dans le support de la mesure aléatoire $\nu_0(t,x,du)$.

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cela n'est vrai que si F' est constant sur $[u,\bar{u}]$ et d'après les suppositions sur F, nécessairement l'intervalle est réduit au point $\bar{u}$ presque sûrement d'où la conclusion. $\square$

Par l'estimation (85) et le lemme de Fatou, on a donc pour $p = 2, 4, \ldots$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\int_x \int_u |u|^p \nu_0(t,x,du)dx] < \infty. \quad (105)$$

De plus, si l'on a l'égalité (92) alors

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\int_x \int_u |\bar{u}(t,x)|^p dx] < \infty. \quad (106)$$

4.5 Existence d'une solution entropique forte stochastique

On peut finalement établir l'existence de notre solution entropique forte stochastique.

On suppose que $F_\varepsilon(r) = (F_{\varepsilon,1}, \dots, F_{\varepsilon,d})$ est défini comme précédemment, $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ est convexe et à croissance au moins polynomiale. On définit $\Psi_\varepsilon = (\Psi_{\varepsilon,1}, \dots, \Psi_{\varepsilon,d})$ avec $\Psi_{\varepsilon,k}(r) = \int_0^r \Phi'(s)(F_{\varepsilon,k})'(s)ds$. On réécrit (81) de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
< \Phi\varphi, \nu_\varepsilon(t) > - < \Phi\varphi, \nu_\varepsilon(s) > \leq & \int_{(s,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} (\Psi_\varepsilon.\nabla\varphi)\nu_\varepsilon(r,x,du)dxdr \\
& + \frac{1}{2}\int_Z \int_{(s,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} (\Phi''\sigma_\varepsilon^2\varphi)\nu_\varepsilon(r,x,du)dxdr\mu(dz) \\
& + \varepsilon \int_{(s,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} (\Phi\Delta\varphi)\nu_\varepsilon(r,x,du)dxdr \\
& + \int_{(s,t]\times Z} < \Phi'\sigma_\varepsilon\varphi, \nu_\varepsilon(r) > W(dr,dz) \quad (107)
\end{aligned}$$

où $\Phi\varphi = \Phi(u)\varphi(x)$.

Alors on obtient le résultat suivant par passage à la limite et après justifications :

Lemme 12.
Soit $u(0)$,F,σ satisfaisant les conditions du théorème 2. Alors le processus $\mathcal{F}_t$-adapté $\nu_0(t)$ a sa trajectoire dans $\mathcal{C}([0,\infty), \mathcal{M}_0)$ et satisfait

$$\begin{aligned}
< \Phi\varphi, \nu_0(t) > - < \Phi\varphi, \nu_0(s) > \leq & \int_{(s,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} (\Psi.\nabla\varphi)\nu_0(r,x,du)dxdr \\
& + \frac{1}{2}\int_Z \int_{(s,t]\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}} (\Phi''\sigma^2\varphi)\nu_0(r,x,du)dxdr\mu(dz) \\
& + \int_{(s,t]\times Z} < \Phi'\sigma\varphi, \nu_0(r) > W(dr,dz). \quad (108)
\end{aligned}$$

On vérifie alors que l'on obtient bien (27), (28) et (29) pour $u = \bar{u}$. Or, on a établi que l'on a (106) donc (27). De plus, d'après l'hypothèse sur la majoration de σ, (28) est vérifiée et enfin, l'inégalité (108) associée à (92) nous donne bien (29).

Reste alors à prouver le point (3) de la définition. Soit $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(t,x)$ un processus arbitraire $\mathcal{F}_t$-adapté à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}[\|\tilde{u}(t)\|_p^p] < \infty \qquad \forall T > 0,\ p = 2, 4, \dots.$$

On veut établir :

Lemme 13.
Pour tout $T > 0$, il existe une fonction déterministe $\{A(s,t) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ telle que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\int_{(s,t]\times Z}\int_y\int_x & \beta'(\tilde{u}(r,x) - u(t,y))\sigma(x,\tilde{u}(r,x);z)\varphi(x,y)dxdyW(dr,dz)] \\
& \leq \mathbb{E}[-\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(\int_{Z\times(s,t]} \beta''(\tilde{u}(r,x) - u(r,y))\sigma(y,u(r,y);z) \\
& \qquad \times \sigma(x,\tilde{u}(r,x);z)\mu(dz)dr)\varphi(x,y)dxdy] + A(s,t) \quad (109)
\end{aligned}$$

avec la propriété suivante, pour toute suite de partitions $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq T$

$$\lim_{\max_i |t_{i+1}-t_i|\to 0^+} \sum_i A(t_i, t_{i+1}) = 0. \quad (110)$$

Cette preuve repose sur des estimations. Pour tout $\alpha \in \mathcal{C}^2$ telle que $\alpha, \alpha', \alpha'' \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$, on note

$$N(\alpha,\varphi)(s,t;y,v) = \int_{(s,t]\times Z} \int_x \alpha(\tilde{u}(r,x)-v)\sigma(x,\tilde{u}(r,x);z)\varphi(x,y)dxW(dr,dz) \tag{111}$$

où $0 \le s \le t$, $(y,v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et l'intégrale ci-dessus est une intégrale d'Itô.

Pour tout s fixé, ceci est une martingale en $t \ge s$.

On note que $N(\alpha,\varphi)(s,t;y,v) = 0$ pour $|y| > C$ où $C = C_\varphi$ constante dépendant seulement du support de φ.

Alors on a le résultat suivant :

Lemme 14.
Supposons que $\alpha \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors pour tout $T > 0$, $p > 5$, il existe $a > 0$, $C_2 > 0$ telles que pour tout $\delta > 0$

$$\mathbb{E}[sup_{s,t\in[0,T],|t-s|<\delta} \|N(\alpha,\varphi)(s,t;.,.)\|_p^p] < C_2\delta^a. \tag{112}$$

Supposons que $\alpha, \alpha' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $p > 8$, alors

$$\mathbb{E}[sup_{s,t\in[0,T],|t-s|<\delta} \|N(\alpha,\varphi)(s,t;.,.)\|_\infty^p] < C_{2,\alpha,\varphi}\delta^a. \tag{113}$$

Soit $\beta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfaisant les conditions du lemme 1. Soit $k = 1, 2, \ldots, d$ fixé et

$$\Gamma_{1,\varepsilon}(s,t) = \int_y \int_s^t (N(\beta'',\varphi)(s,r;y,u_\varepsilon(r,y)))(-\partial_{y_k} F_\varepsilon(r,y)))drdy \tag{114}$$

$$\Gamma_{2,\varepsilon}(s,t) = \int_y \int_s^t (N(\beta'',\varphi)(s,r;y,u_\varepsilon(r,y)))\varepsilon\Delta_{yy}u_\varepsilon(r,y)dydr. \tag{115}$$

On admet le lemme suivant :

Lemme 15.
Soit $A(s,t) = A_1(s,t) + A_2(s,t)$ où $A_k(s,t) = \liminf_{\varepsilon>0} \mathbb{E}[|\Gamma_{k,\varepsilon}(s,t)|]$, $k = 1, 2$.

Alors pour toute suite de partitions de $[0,T]$, $T > 0$, $0 \le t_1 \le \cdots \le t_m$,

$$\lim_{\max_i |t_{i+1}-t_i| \to 0^+} \sum_i A(t_i, t_{i+1}) = 0.$$

On peut alors prouver le lemme 13.

Preuve du Lemme : Soit J, J_δ définis dans la partie 1.3, on pose

$$\begin{aligned} Z_{\varepsilon,\delta}(t) &= \int_{|y|<c_\varphi} \int_v (N(\beta',\varphi)(s,t;y,u_\varepsilon(t,y)-v))J_\delta(v)dvdy \\ &= \int_{|y|<c_\varphi} \int_v (N(\beta',\varphi)(s,t;y,v))J_\delta(u_\varepsilon(t,y)-v)dvdy. \end{aligned} \tag{116}$$

$Z_{\varepsilon,\delta}$ est une semi-martingale en $t \ge s$.

On observe que $|Z_{\varepsilon,\delta}(t)| \le \tilde{C}_\varphi \|N(\beta',\varphi)(s,t;.,.)\|_\infty$ et grâce aux estimations, on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0^+} \mathbb{E}[Z_{\varepsilon,\delta}(t)] &= \mathbb{E}[\lim_{\delta\to 0^+} Z_{\varepsilon,\delta}(t)] \\ &= \mathbb{E}[\int_y (N(\beta',\varphi)(s,t;y,u_\varepsilon(t,y)))dy]. \end{aligned} \tag{117}$$

De même, on prouve que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} \mathbb{E}[Z_{\varepsilon,\delta}(t)] = \mathbb{E}[\int_y (N(\beta',\varphi)(s,t;y,u(t,y)))dy]. \tag{118}$$

Alors d'après la formule d'Itô, $d(XY) = XdY + YdX + d < X, Y >$ et par intégration par parties par rapport à v appliquées à (116),

$$
\begin{aligned}
Z_{\varepsilon,\delta}(t) = \quad & \int_y \int_v \int_{r=s}^t J_\delta(u_\varepsilon(r,y)-v) N(\beta',\varphi)(s,r;y,v) drdydv \\
& + \int_y \int_s^t (\int_v N(\beta'',\varphi)(s,r;y,v) J_\delta(u_\varepsilon(t,y)-v)) \\
& \times(-div_y F_\varepsilon(u_\varepsilon(r,y))dr + \varepsilon \Delta_{yy} u_\varepsilon(r,y)dr + \int_z \sigma_\varepsilon(y,u_\varepsilon(r,y);z)W(dr,dz))dy \\
& + \int_y \int_{(s,t]\times Z} (\int_v N(\beta''',\varphi)(s,r;y,v)\tfrac{1}{2} J_\delta(u_\varepsilon(r,y)-v))dv) \times \sigma_\varepsilon^2(y,u_\varepsilon(r,y);z)\mu(dz)drdy \\
& - \int_x \int_y \int_{(s,t]\times Z} (\int_v \beta''(\tilde u(r,x)-v) J_\delta(v-u_\varepsilon(r,y))dv)\sigma(x,\tilde u(r,x);z)\varphi(x,y) \\
& \times \sigma_\varepsilon(y,u_\varepsilon(r,y);z)\mu(dz)drdxdy.
\end{aligned}
\tag{119}
$$

Alors $\mathbb{E}[Z_{\varepsilon,\delta}] = I_{\varepsilon,\delta} + II_{\varepsilon,\delta} + III_{\varepsilon,\delta} + IV_{\varepsilon,\delta}$ où

$$I_{\varepsilon,\delta} = \mathbb{E}[\int_y \int_s^t (\{N(\beta'',\varphi)(s,r;y,.) * J_\delta(.)\}(u_\varepsilon(r,y)))(-div_y F_\varepsilon(u_\varepsilon(r,y)))drdy],$$

$$II_{\varepsilon,\delta} = \mathbb{E}[\int_y \int_s^t (\{N(\beta'',\varphi)(s,r;y,.) * J_\delta(.)\}(u_\varepsilon(r,y)))(\varepsilon \Delta_{yy} u_\varepsilon(r,y))drdy],$$

$$III_{\varepsilon,\delta} = \frac{1}{2}\mathbb{E}[\int_y \int_{(s,t]\times Z} (\{N(\beta'',\varphi)(s,r;y,.) * J_\delta(.)\}(u_\varepsilon(r,y)))\sigma_\varepsilon^2(y,\varepsilon(r,y);z)\mu(dz)drdy],$$

$$
\begin{aligned}
IV_{\varepsilon,\delta} = -\mathbb{E}[\int_x \int_y \int_{(s,t]\times Z} (\int_v \beta''(\tilde u(r,x)-u_\varepsilon(r,y))dv) J_\delta(u_\varepsilon(r,y)-v)) \\
\times\ \sigma(x,\tilde u(r,x);z)\sigma_\varepsilon(y,u_\varepsilon(r,y);z)\mu(dz)\varphi(x,y)dxdydr].
\end{aligned}
$$

Or $\|\beta''(.)\|_\infty < \infty$, donc par convergence dominée,

$$
\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0^+} IV_{\varepsilon,\delta} = -\mathbb{E}[\int_x \int_y \int_{(s,t]\times Z} \beta''(\tilde u(r,x)-u_\varepsilon(r,y))dv) \\
\times\ \sigma(x,\tilde u(r,x);z)\sigma_\varepsilon(y,u_\varepsilon(r,y);z)\mu(dz)\varphi(x,y)dxdydr]
\end{aligned}
$$

De plus, d'après nos hypothèses, on peut également passer à la limite sur les ε et on obtient :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} IV_{\varepsilon,\delta} = -\mathbb{E}[\int_x \int_y \int_{(s,t]\times Z} \beta''(\tilde u(r,x)-u(r,y))dv) \\
\times\ \sigma(x,\tilde u(r,x);z)\sigma(y,u(r,y);z)\mu(dz)\varphi(x,y)dxdydr]
\end{aligned}
$$

On a également :

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \liminf_{\delta\to 0^+} III_{\varepsilon,\delta} \le C\mathbb{E}[\int_s^t \|N(\beta'',\varphi)(s,r;y,.)\|_\infty (1 + \int_{|y|\le c_\varphi} |u(r,y)|^2 dy)dr] \equiv A_3(s,t).$$

D'après le lemme 14 et la condition (27), pour toute partition de $[0,T]$,

$$\lim_{max_i|t_{i+1}-t_i\to 0^+} \sum_{i=1}^m A_3(t_i,t_{i+1}) = 0.$$

Enfin, par le lemme 14 et le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{\delta\to 0^+} I_{\varepsilon,\delta} = \mathbb{E}[\int_y \int_s (N(\beta'',\varphi)(s,r;y,u_\varepsilon(r,y)))(-div_y F_\varepsilon(r,y)))drdy].$$

D'où d'après le lemme 15, on a

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \lim_{\delta\to 0^+} I_{\varepsilon,\delta} \le A_1(s,t)$$

avec A_1 défini dans le lemme 15. On traite $II_{\varepsilon,\delta}$ similairement. Finalement, on prend $A(s,t) = A_1(s,t) + A_2(s,t) + A_3(s,t)$ et on peut conclure. $\square$

Conclusion

Ainsi, nous avons finalement établi l'existence d'une solution entropique forte stochastique. On note que la démarche effectuée ici a été d'adapter un type de solutions, dont le choix était judidicieux dans le cadre détermininiste, au cadre stochastique. La question que l'on peut alors se poser est la suivante : ce choix de solutions est-il également pertinent dans le cadre stochastique ? En d'autres termes, peut-on également espérer établir un résultat tel que l'unicité ?

On peut également se demander dans quelles mesures le bruit influence notre système et s'il peut apporter des propriétés qui amélioreraient les théories d'existence. En effet, dans ce mémoire, notre solution approchée est construite à l'aide d'équations du type

$$\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = \int_{z\in Z} \sigma(x, u(t,x); z)\partial_t W(t, dz) + \varepsilon\Delta_{xx} u(t,x). \tag{120}$$

mais on pourrait faire le choix d'étudier des équations du type

$$\partial_t u(t,x) + div_x F(u(t,x)) = \varepsilon^\alpha \int_{z\in Z} \sigma(x, u(t,x); z)\partial_t W(t, dz) + \varepsilon\Delta_{xx} u(t,x). \tag{121}$$

avec $\alpha > 0$ pour déterminer si le bruit nous apporte des informations supplémentaires.

Une question importante est alors de voir quel système on obtient à la limite. En effet, dans le cas déterministe traité dans [1] si au lieu d'étudier $\partial_t f_\varepsilon(x,v,t) + div_x(a(x,v)f_\varepsilon(x,v,t)) = \frac{1}{\varepsilon}[\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v) - f_\varepsilon(x,v,t)]$ on étudie l'équation $\partial_t f_\varepsilon(x,v,t) + div_x(a(x,v)f_\varepsilon(x,v,t)) + \frac{F(x)}{\varepsilon}\partial_v f_\varepsilon(x,v,t) = \frac{1}{\varepsilon}[\chi_{u_\varepsilon(x,t)}(v) - f_\varepsilon(x,v,t)]$ alors la limite obtenue est modifiée. Au lieu d'obtenir $\partial_t u(x,t) + div_x A(x,u) = 0$ où $A(x,u) = \int_0^u a(x,v)dv$ on a $\partial_t u(x,t) + div_x B(x,u) = 0$ où $B(x,u) = \int_0^u \int_0^{+\infty} a(x, v + F(x)w)e^{-w} dw dv$.

Références

[1] F. Berthelin, N.J. Mauser, F. Poupaud, High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws, Journal of Hyperbolic Diff. Equations 4, no. 1, 123-145,(2007).

[2] D. Dacunha-Castelle, M. Duflo : Probabilités et Statistique, 2-Problèmes à temps mobile, Masson, 218, (1993).

[3] L. C. Evans, Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations, CBMS Reg. Conf. Ser. Math. ,vol. 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI. (1990).

[4] J. Feng and D. Nualart, Stochastic scalar conservations laws, Journal of functional analysis 255, 313-373, (2008).

[5] J.F. Le Gall, Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires, www.math.u-psud.fr/∼jflegall/IPPA2.pdf, (2006).

[6] B. Perthame and E. Tadmor, A Kinetic Equation with Kinetic Entropy Functions for Scalar Conservation Laws, Commun. Math. Phys. 136-501-517 (1991).

[7] D. Serre, Systèmes de lois de conservation II, Diderot éditeur, Arts et Sciences, 47-96,(1996).

[8] E. Tadmor, Semi-discrete approximations to nonlinear systems of conservation laws ; consistency and L^∞-stability imply convergence, ICASE Report No. 88-41,(1988).