DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Examen, Année 2002-2003.

Durée : 3h

Note 1 : Les documents, calculatrices, ... ne sont pas autorisés.
Note 2 : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre choisi par la candidat. Un barême indicatif est précisé pour chaque exercice.

Exercice 1, Séries entières [8 points]

Les trois questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer le rayon de convergence, puis calculer la somme de la série entière
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - n)\ x^n.$$

2. Obtenir le développement en série entière au voisinage de 0 de
$$g(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t^2)\, dt, \qquad (\text{rappel : } \mathrm{ch}x = (e^x + e^{-x})/2).$$

3. On se donne l'équation différentielle suivante sur l'intervalle $]\,0, +\infty[$,
$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad (x^2 + x)\, y'' + (3\,x + 1)\, y' + y = 0\ .$$
On cherche une solution de cette équation qui soit développable en série entière. On suppose que cette solution est de la forme :
$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R, R\,[\ .$$
   (a) Trouver une relation simple entre a_n et a_{n+1} pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $a_n = (-1)^n a_o$ et une expression simple de y (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue).

Exercice 2, Séries de fonctions [6 points]

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$f_n(x) = \frac{e^{-n^2 x}}{n^3}.$$

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, la série $\sum f_n(x)$ converge.

   On peut ainsi définir la somme de la série de fonctions

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. (a) Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $[0, +\infty[$.

   (b) En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$. (On rappellera l'énoncé du théorème utilisé.)

3. (a) Calculer $f_n'(x)$ sur $[0, +\infty[$.

   (b) Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n' sur $[b, +\infty[$ pour $b > 0$.

   (c) En déduire que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3, Séries de Fourier [6 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, **paire**, telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } t = \frac{\pi}{2}, \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \ . \end{cases}$$

1. Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Calculer les coefficients de Fourier de f.

3. Pourquoi la série de Fourier de f converge - t'elle ? Combien vaut sa somme ? (On rappellera l'énoncé du théorème utilisé.)

4. En déduire la somme de la série : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$.

Fin du sujet.