DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Examen, Année 2003-2004.

Durée : 2h

Note 1 : Les documents, calculatrices, ... ne sont pas autorisés.
Note 2 : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre choisi par la candidat. Un barême indicatif est précisé pour chaque exercice.
Note 3 : Il est possible d'avoir plus de 20/20...

Exercice 1, Séries de Fourier [6 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, et telle que $f(t) = \pi^2 - t^2$ pour $t \in]-\pi, \pi]$.

1. Dessiner cette fonction sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire la série de Fourier de f.
3. Pourquoi la série de Fourier de f converge - t-elle ? Donner la valeur de sa somme ? (On rappellera l'énoncé du théorème utilisé.)
4. En déduire les sommes des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2, Séries de fonctions [6 points]

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x)}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

   On peut ainsi définir la somme de la série de fonctions

   $$F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Calculer f_n' et en déduire $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$.
3. En déduire que F est continue sur $[0, +\infty[$.
4. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3, Equations différentielles et Séries entières [10 points]

1. Résoudre l'équation différentielle $xy' + y = 0$.
2. On se donne maintenant l'équation différentielle suivante

$$(\mathcal{E}) \qquad\qquad (x - x^2)\, y'' + (1 - 3\,x)\, y' - y = 0\ .$$

On cherche une solution, que l'on appelle y_1, de cette équation $(\mathcal{E})$ qui soit développable en série entière. On suppose donc que cette solution est de la forme :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{sur l'intervalle de convergence }]-R, R[\ .$$

(a) Montrer que $a_1 = a_0$ et que

$$(n+1)^2\ (a_{n+1} - a_n) = 0, \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(b) En déduire la valeur de a_n en fonction de a_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis une expression simple de $y_1(x)$ en fonction de a_0 et de x (c'est-à-dire que l'on donnera la valeur de la somme de la série entière obtenue). Préciser son rayon de convergence.

(c) On cherche les autres solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On pose pour cela $y_2(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1-x}$ où λ est une fonction que l'on cherche à déterminer. On suppose donc que y_2 est solution de $(\mathcal{E})$.
En déduire que la fonction λ vérifie $x\lambda'' + \lambda' = 0$.
Résoudre cette dernière équation (en s'aidant du 1.) et en déduire la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$.

Fin du sujet.