Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 2 (Intégrale généralisée), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Définition, cours et premiers exemples)

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2) Quelle est la nature des intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx,\ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx,\ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx,\ \int_{0}^{1} \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx.$$

3) En utilisant la définition de l'intégrale généralisée, montrer la convergence et calculer la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt,\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 2 (Continuité et convergence)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Dans le cas contraire, donner un contre-exemple.
a) Si f est continue sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
b) Si f est continue sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
c) Si f est continue sur $]a, b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
d) Si f est continue sur $]a, b[$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Exercice 3 (Equivalents)

1) Déterminer un équivalent de chacune des fonctions suivantes au point considéré.

$$f : x \mapsto \frac{(2x^2 + 3x^3)(2x + 5)}{5x + x^4} \text{ en 0 puis en } +\infty,\ g : x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x-2}} \text{ en 2,}$$

puis en déduire la nature de $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_2^3 g(x)\,dx$.

2) Etudier la nature de $\int_0^1 \frac{1}{x^3 - 5x^2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 20}\,dx$.

Exercice 4 (Exponentielle et logarithme)

1) Ecrire la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.
2) Montrer que $e^{-x^2} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$. En déduire la nature de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.
3) Montrer que $\int_0^1 \ln x\,dx$ converge. (On utilisera la définition comme à l'ex 1.)
4) Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$.

Exercice 5 (Développement limité)

1) a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de $x \mapsto e^x$.
b) Déterminer un équivalent de $h : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} - 1$ en 0.
c) En déduire la nature de $\int_0^1 h(x)\,dx$.

2) Etudier la convergence de l'intégrale suivante : $$\int_0^1 \frac{e^t + e^{-t} - 2\cos(t)}{t^2\sqrt{t}}\,dt.$$

3) a) Donner le développement limité à l'ordre 1 au point 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
b) En déduire la nature de $\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{1-t}}\,dt$.

Exercice 6 (Calcul de sommes)

Etudier la convergence des intégrales ; s'il y a convergence, calculer leurs valeurs.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx,\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}\,dx,\ \int_0^1 x^\alpha \ln x\,dx\ (\alpha \geq 0).$$

Exercice 7 (Récurrence)

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) Etudier la convergence de I_n. (Penser à l'exercice 4.)
2) Exprimer I_n en fonction de I_{n-1} et de n pour $n \geq 1$.
3) Exprimer I_n en fonction de I_0 et n et enfin, I_n en fonction de n.

Exercice 8 (Exercice type)

Etudier la convergence des intégrales

$$\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{(2-x)^\alpha (x-1)^{3/2}}\,dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice 9 (Intégrales semi-convergentes)

1) Etudier la convergence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ et $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\,dx$.
2) Etudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$$

selon deux méthodes : avec une intégration par partie et en utilisant le théorème d'Abel dont on rappellera l'énoncé.

3) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$.
4) Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\,dt$ pour $\alpha \in]0,1]$.

Exercice 10 (Valeur d'intégrale et divergence)

Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

Calculer $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_{-X}^{X} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_{-2X}^{X} \frac{t}{1+t^2}\,dt$.

Annales

Sujets et corrigés d'anciens examens accessibles à l'adresse

http://www-math.unice.fr/~ bertheli/Page_Web/page6.html

Sur le thème de cette feuille de TD, voir l'exercice 3 du partiel 2002-03, l'exercice 2 de la session de septembre 2003, l'exercice 2 du partiel 2003-04 et l'exercice 1 de la session de septembre 2004.

A titre d'exemple, voici l'exercice 2 du partiel 2003-04 :

1. Faire le changement de variable $x^3 = y$ dans l'intégrale suivante, où $X \in [1,+\infty[$,

$$\int_1^X x\cos(x^3)\,dx.$$

2. Etudier la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y^a}\,dy$$

pour $a > 0$. On énoncera le théorème utilisé.

3. En déduire la nature de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\,dx.$$