DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Partiel, Année 2002-2003.

Durée : 1h45

Note 1 : Les documents, calculatrices, ... ne sont pas autorisés.
Note 2 : Il sera tenu compte dans la notation de la précision et de la clarté des arguments utilisés.
Note 3 : Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre choisi par la candidat.
Note 4 : Il est possible d'avoir 21/20...

Questions de cours [4 points]

1. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si les sommes partielles S_n de cette série sont majorées.
2. Enoncer le théorème donnant des équivalents d'intégrales généralisées lorsque l'on a l'équivalence entre deux fonctions en un point b.
3. Enoncer le théorème d'Abel pour les intégrales généralisées.

Exercice 1 [3 points]

Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{n!}{a^n n^n},$$

pour toutes les valeurs de $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 2 [5 points]

Soit la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha},$$

avec $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour $\alpha \leq 0$, $\sum u_n$ est divergente.
2. Etudier la convergence absolue de $\sum u_n$ selon les valeurs de $\alpha > 0$.
3. Montrer que pour $\alpha \in]0, 1]$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right).$$

4. Etudier la semi-convergence de $\sum u_n$ selon les valeurs de $\alpha > 0$. (On pourra séparer les cas $1/2 < \alpha \leq 1$ et $0 < \alpha \leq 1/2$.)

Exercice 3 [9 points]

On fait le rappel suivant qui pourra être utilisé le moment venu. Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, on pose $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ pour $x \in [0, +\infty[$. Alors G est dérivable et $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

1. Soit $x \in [0, +\infty[$. Montrer que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \text{ est convergente.}$$

   (On fera particulièrement attention au cas où $x = 0$.)

2. D'après la question 1), il est possible de définir la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ selon

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

   pour tout $x \in [0, +\infty[$.

   (a) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

   (b) En déduire que f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$.

3. Etude en $+\infty$.

   (a) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^3}\, dt.$$

   (b) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{2 \sin t}{t^3}\, dt \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

4. En utilisant les résultats obtenus aux questions précédantes, étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Fin du sujet.