DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Partiel, Année 2003-2004.

Durée : 1h30

Note 1 : Les documents, calculatrices, ... ne sont pas autorisés.
Note 2 : Les trois exercices sont indépendants.
Note 3 : Il est possible d'avoir 21/20...

Exercice 1 [8 points]

Les questions suivantes sont indépendantes (barème : 2 points, 2.5 points, 3.5 points).

1. Etudier la convergence de l'intégrale généralisée suivante suivant les valeurs de $a, b, c \geq 0$,
$$\int_c^{+\infty} \frac{1}{(x-a)(1+bx)}\,dx.$$
(Exceptionnellement pour cette question, faire une rédaction succinte).

2. Etudier la nature de la série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

3. Montrer, en énonçant le théorème principal utilisé, que la série
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$$
est convergente. Puis calculer la somme de cette série.

Exercice 2 [5 points]

1. Faire le changement de variable $x^3 = y$ dans l'intégrale suivante, où $X \in [1, +\infty[$,
$$\int_1^X x\cos(x^3)\,dx.$$

2. Etudier la nature de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y^a}\,dy$$
pour $a > 0$. On énoncera le théorème utilisé.

3. En déduire la nature de l'intégrale généralisée
$$\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\,dx.$$

Exercice 3 [8 points]

1. (a) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Montrer que, pour $k \geq 1$ entier, on a

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx.$$

   (b) On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ converge.

   On pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ pour n entier positif. Montrer que, pour $n_0 \geq 1$ entier, on a

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_{n_0} \leq \int_{n_0-1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Etudier la nature de la série

$$S_a = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 + a^4}.$$

   (b) Montrer que, pour b un réel positif, on a

$$\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^4 + a^4}\,dx = \frac{1}{a^3} \int_{b/a}^{+\infty} \frac{1}{u^4 + 1}\,du.$$

3. En utilisant les questions 1) et 2), montrer que

$$0 \leq a^3 S_a \leq C, \qquad \text{pour tout } a > 0,$$

   où C est une constante réelle indépendante de a. En conclure la limite de S_a lorsque $a \to +\infty$.

Fin du sujet.