DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
2ème section, Année 2003-2004.

Durée : 2h

Note 1 : Les documents, calculatrices, ... ne sont pas autorisés.
Note 2 : Les exercices sont indépendants. Un barême indicatif est précisé pour chaque exercice.

Exercice 1 [6 points]

Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes, puis calculer la valeur de l'intégrale dans les cas de convergence :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\, dx, \qquad a > 0,$$

et

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\, dx.$$

Exercice 2 [2 points]

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx^2)}{n^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 [6 points]

On pose $u_n = \frac{\sin n}{\cos n + \sqrt{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

   (b) En déduire que

   $$u_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2n)}{n} + v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n),$$

   où

   $$v_n = \frac{\sin(n)\cos^2(n)}{n^{3/2}}.$$

2. Etudier la nature de la série $\sum v_n$.

3. (a) Rappeler la valeur de la somme des $N+1$ premiers termes d'une suite géométrique : si $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\sum_{n=0}^{N} q^n = ...$

(b) En prenant $q = e^i$ et la partie imaginaire de la formule du a), en déduire que

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \sin(n)\right| \leq M$$

où M est une constante (à préciser) indépendante de N.

(c) Que faut-il prendre comme valeur de q pour montrer de même que $\sum_{n=1}^{N} \sin(2n)$ est bornée par rapport à N ?

(d) Etudier la nature des séries $\sum \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{\sin(2n)}{n}$.

4. Déduire du 1)-2)-3) la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 4 [6 points]

1. Donner le développement en série entière des fonctions

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}, \qquad x \mapsto \ln(1-x).$$

2. On suppose que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

(a) Que vaut $f(2x)$ et sur quel intervalle la formule est-elle valide ?

(b) On suppose que

$$f(2x) - f(x) = \ln(1-x). \qquad (1)$$

Ecrire cette égalité sous la forme

$$b_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n = 0,$$

où les b_n sont à préciser et indépendants de x.

(c) Pourquoi est-ce que $b_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

(d) En déduire que $a_n = \frac{1}{n(1-2^n)}$, $\forall n \geq 1$.

(e) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ ainsi obtenue ?

(f) Ecrire les séries entières solutions de (1).

Fin du sujet.