Licence MI 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Feuille 5 (Séries de fonctions), Année 2004-2005.

Exercice 1 (Convergence simple, uniforme et normale)

1. Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Etudier la convergence simple de la série de fonctions de terme général f_n.

   (b) Etudier la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $\mathbb{R}$.

   (c) En déduire la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général f_n sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Etudier les convergences simples et uniformes de la série de fonctions de terme général g_n.

   (b) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général g_n' sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $h_n(x) = \sin\left(\frac{x^2+n^2}{n^4+1}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_n h_n(x)$ converge. (On pourra utiliser $|\sin x| \leq |x|$).

   (b) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général h_n sur $[-R, R]$ avec $R > 0$.

Exercice 2 (Continuité et dérivabilité de séries de fonctions)

On reprend les notations de l'exercice précédant.

1. On note pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   Parmi les trois convergences obtenues, laquelle suffit pour assurer que F est bien définie ?
   Même question pour la continuité.

2. Montrer que la fonction G, définie par $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que la fonction somme H de la série de fonctions de terme général h_n est dérivable sur $[-R, R]$ pour $R > 0$.

   (b) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $k_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $k_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général k_n.

   (b) Montrer que la fonction somme K de cette série est continue sur $[0, +\infty[$.

   (c) Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général k'_n sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

   (d) Montrer que K est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 (Calcul de la somme de la série à l'aide de la dérivation)

Soit f définie comme la somme de la série de fonctions

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx).$$

1. On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n} \cos^n(x) \sin(nx)$. Montrer que $\sum u_n(x)$ converge uniformément sur $[a, \pi - a]$, $\forall\, 0 < a < \pi/2$.
   Que peut-on en déduire sur f ?

2. Montrer que $\sum u'_n(x)$ converge uniformément sur $[a, \pi - a]$, $\forall\, 0 < a < \pi/2$.
   Que peut-on en déduire sur f ?

3. Montrer que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1}(x) \cos((n+1)x),$$

   puis que

$$f'(x) = \mathcal{R}\mathrm{e}\left(\frac{e^{2ix}}{1 - \cos x e^{ix}}\right).$$

   On précisera les valeurs de x pour lesquelles on a obtenu ce résultat.

4. Simplifier l'expression précédante et en déduire une autre expression de f.

Annales (Examen 2003-2004)

Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + n^2 x)}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

   On peut ainsi définir la somme de la série de fonctions

$$F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Calculer f'_n et en déduire $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)|$.

3. En déduire que F est continue sur $[0, +\infty[$.

4. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.