DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Corrigé de quelques points de l'examen, Année 2002-2003.

Exercice 1

1) On pose $a_n = n^2 - n$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 - n - 1}{n^2 - n}\right| = \left|\frac{n^2+n}{n^2-n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^2} = 1,$$

et ainsi par le théorème de d'Alembert sur les séries entières, le rayon de convergence de f est $1/1 = 1$. On a pour $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\ x^n = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\ x^{n-2},$$

or on sait que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \text{ sur }]-1,1[,$$

et que l'on peut dériver une série entière sur son intervalle de convergence autant de fois que l'on veut, ainsi en dérivant deux fois on obtient

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad \text{sur }]-1,1[,$$

et donc

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \qquad \text{sur }]-1,1[.$$

2) On sait que

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \qquad \text{sur } \mathbb{R},$$

donc

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2n!} t^n \qquad \text{sur } \mathbb{R},$$

seul les termes d'indices paires sont non nuls, d'où

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{2k} \qquad \text{sur } \mathbb{R},$$

donc

$$\mathrm{ch}(t^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} t^{4k} \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

On peut intégrer une série entière sur son intervalle de convergence, d'où

$$g(x) = \int_0^x \mathrm{ch}(t^2)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!(4k+1)} t^{4k+1} \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

3) Soit $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$.
a) Sur l'intervalle de convergence $]-R,R[$, on a

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\, y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2},$$

donc

$$\begin{aligned}(x^2+x)y'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n+\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}\\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)a_k x^k+\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)k a_{k+1}x^k,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(3x+1)y' &= \sum_{n=1}^{+\infty} 3n a_n x^n+\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 3k a_k x^k+\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)a_{k+1}x^k,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & (x^2+x)y''+(3x+1)y'+y\\ = & (a_1+a_0)+(2a_2+3a_1+2a_2+a_1)x\\ & +\sum_{k=2}^{+\infty}(k(k-1)a_k+(k+1)k a_{k+1}+3k a_k+(k+1)a_{k+1}+a_k)x^k\\ = & (a_1+a_0)+4(a_2+a_3)x+\sum_{k=2}^{+\infty}((k+1)^2a_k+(k+1)^2a_{k+1})x^k.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient $a_1+a_0=0$, $a_2+a_1=0$ et $a_{k+1}+a_k=0$ pour $k\geq 2$. Finalement, on a obtenu que

$$a_{n+1}+a_n=0 \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

b) Par récurrence, ceci donne $a_n=(-1)^n a_0$ et donc

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_0 x^n=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n=\frac{a_0}{1+x},$$

Exercice 2

Soit $f_n:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par

$$f_n(x)=\frac{e^{-n^2x}}{n^3}.$$

1) Pour tout $x \geq 0$,

$$|f_n(x)| \leq= \left| \frac{e^{-n^2 x}}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}, \tag{1}$$

or $\sum 1/n^3$ est convergente, donc par comparaison, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente.

On peut ainsi définir la somme de la série de fonctions

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2) a) De (1), on déduit que

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3},$$

ce qui prouve la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n sur $[0, +\infty[$.

b) Comme de plus, chaque f_n est continue sur $[0, +\infty[$, ceci donne que la somme f de la série de fonctions est continue sur $[0, +\infty[$.

3) a) On a $f_n'(x) = -\frac{e^{-n^2 x}}{n}$ sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $b > 0$. Pour $x \in [b, +\infty[$, on a

$$e^{-n^2 x} \leq e^{-n^2 b},$$

et donc

$$\sup_{x \in [b,+\infty[} |f_n'(x)| \leq \frac{e^{-n^2 b}}{n},$$

ce dernier terme étant le terme général d'une série convergente puisque

$$\frac{e^{-n^2 b}}{n} = \underset{n \to +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Ceci donne donc la convergence normale de la série de fonctions de terme général f_n' sur $[b, +\infty[$.

c) On déduit des deux questions précédantes et du 1, que f est dérivable sur $[b, +\infty[$ et ceci quelque soit $b > 0$. La dérivation étant une propriété ponctuelle et la réunion des intervalles est $]0, +\infty[$ ce qui permet de conclure.

Exercice 3

2) Comme f est paire, on a déjà $b_n(f) = 0$. On calcule les autres coefficients et on trouve

$$a_{2p}(f) = 0, \qquad a_{2p+1}(f) = \frac{4(-1)^p}{(2p+1)\pi}.$$

3) f est 2π périodique et dérivable par morceaux puisque dérivable sur $[-\pi, -\pi/2[$, sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et sur $]\pi/2, \pi]$ et que $\lim_{\pi/2^-} f' = -1$, $\lim_{\pi/2^+} f' = 1$,

$\lim_{-\pi/2^-} f' = 1$, $\lim_{-\pi/2^+} f' = -1$. Le théorème de Dirichlet nous donne alors la convergence de la série de Fourier de f. Sa somme vaut

$$S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En tout point de continuité $S(f)(x) = f(x)$ et aux points de discontinuité (ici $-\pi/2$ et $\pi/2$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$), on trouve encore l'égalité dans ce cas précis.

4) Appliquant cette égalité en $x = 0$, on trouve

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.$$