**DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,**
**Corrigé de quelques points de l'examen, Année 2003-2004.**

**Exercice 1**

2) Comme $f$ est paire, on a déjà $b_n(f) = 0$. On calcule les autres coefficients et on trouve

$$a_0(f) = \frac{2}{3}\pi^2, \qquad a_n(f) = \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2}(n \geq 1).$$

Pour le calcul des $a_n(f)$ pour $n \geq 1$, faire deux intégrations par parties. Ainsi

$$S(f)(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{n^2} \cos(nx).$$

3) $f$ est $2\pi$ périodique et dérivable par morceaux puisque dérivable sur $]-\pi,\pi]$ et que $\lim_{-\pi^+} f' = 2\pi$, $\lim_{\pi^-} f' = -2\pi$. Le théorème de Dirichlet nous donne alors la convergence de la série de Fourier de $f$. Sa somme vaut

$$S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Mais ici $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ d'où

$$S(f)(x) = f(x), \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4) Appliquant cette égalité en $x = 0$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

et en $x = \pi$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

**Exercice 2**

1) Pour $x = o$, $f_n(0) = 0$ donc $\sum f_n(0)$ converge.
Pour tout $x > 0$,

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}, \tag{1}$$

or $\sum 1/n^3$ est convergente (et $1/n^3 > 0$), donc par le théorème sur les équivalents, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente.

2) On a $f_n'(x) = \frac{1}{n(1+n^2x)^2} \geq 0$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi $f_n$ est croissante. De plus cette fonction s'annule en 0 et a pour limite $1/n^3$ en $+\infty$ d'où

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{1}{n^3}.$$

3) $\sum 1/n^3$ est convergente donc d'après la question précédante, on a convergence normale de $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ et donc aussi convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Comme chaque $f_n$ est continue sur cet ensemble, on en déduit que $F$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4) Soit $a > 0$. Pour $x \in [a, +\infty[$, on a

$$|f_n'(x)| \leq \frac{1}{n(1+n^2a)^2} \text{ terme d'une série convergente (et indep. de } x,$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ et donc uniformément. On en déduit que $F$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ et donc sur la réunion de ces ensembles pour $a > 0$ c'est-à-dire sur $]0, +\infty[$.

**Exercice 3**

1) On a $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$ d'où en intégrant $\ln(y(x)) = -\ln x + C$ où $C$ est une constante. Et ainsi $y(x) = \frac{K}{x}$, où $K$ est une constante.

2) Soit $y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$. Sur l'intervalle de convergence $]-R, R[$, on a a)

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, y_2''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

donc

$$\begin{aligned}(x-x^2)y_1'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1)k a_{k+1} x^k - \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) a_k x^k,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(1-3x)y_1' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k - 3\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^k,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & (x-x^2)y_1'' + (1-3x)y_1' - y_1 \\ = \ & (a_1 - a_0) + (2a_2 + 2a_2 - 3a_1 - a_1)x \\ & + \sum_{k=2}^{+\infty} ((k+1)k a_{k+1} - k(k-1)a_k + (k+1)a_{k+1} - 3k a_k - a_k) x^k \\ = \ & (a_1 - a_0) + 4(a_2 - a_1)x + \sum_{k=2}^{+\infty} ((k+1)^2 a_{k+1} - (k+1)^2 a_k) x^k.\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient $a_1 - a_0 = 0$, $4(a_2 - a_1) = 0$ et $(k+1)^2(a_{k+1} - a_k) = 0$ pour $k \geq 2$. Finalement, on a obtenu $a_1 = a_0$ et

$$(n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1,$$

car $4(a_2 - a_1) = 0$ correspond à cette relation pour $n = 1$.

b) Comme $(n+1)^2 \neq 0$, on a donc $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $a_n = a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi ceci donne

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_0 x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x},$$

avec un rayon de convergence de 1.

c) On a

$$y_2'(x) = \frac{\lambda'}{1-x} + \frac{\lambda}{(1-x)^2},$$
$$y_2''(x) = \frac{\lambda''}{1-x} + \frac{2\lambda'}{(1-x)^2} + \frac{2\lambda}{(1-x)^3},$$

d'où en exprimant la quantité $(x - x^2)y_2'' + (1-3x)y_2' - y_2 = 0$, on trouve que

$$x(1-x)^2\lambda'' + (1-x)^2\lambda' = 0,$$

et donc

$$x\lambda'' + \lambda' = 0.$$

D'après la question 1), on a donc $\lambda'(x) = \frac{K}{x}$ et donc

$$\lambda(x) = C_1 + C_2 \ln x,$$

où $C_1$ et $C_2$ sont deux constantes et donc les solutions de $(\mathcal{E})$ sont

$$y_2(x) = \frac{\lambda(x)}{1-x} = \frac{C_1}{1-x} + \frac{C_2 \ln x}{1-x}.$$