DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
2ème section, Année 2002-2003, Bref corrigé.

Question de cours

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n, \qquad \text{pour } x \in]-1,1[,$$
$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n, \qquad \text{pour } x \in]-1,1].$$

Q.C.M.

Tous faux sauf les deux derniers.

Exercice 1

1) Pour $x \neq 0$, $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$, et pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ donc f_n converge vers f sur $D = \mathbb{R}$ avec $f(x) = 1$ pour $x \neq 0$ et 0 sinon.

2) f_n est continue mais pas f.

3) Il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) vers f sur D car

Théorème : Si f_n continue sur D et (f_n) converge uniformément vers f sur D alors f est continue sur D.

Exercice 2

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,dx$.

1) Tout d'abord $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ donc localement intégrable sur cet ensemble. De plus $x^n e^{-x^2} = \underset{x\to\infty}{o}(\frac{1}{x^2})$ et $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ converge donc I_n converge.

2) Partant de I_{n+2} et par une intégration par partie, on trouve en intégrant xe^{-x^2} et en dérivant x^{n+1} :

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n,$$

d'où

$$I_{2n+1} = n!I_1.$$

3) Comme $I_1 = \frac{1}{2}$, on a donc $I_{2n+1} = \frac{n!}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

1) Le rayon de convergence est 1 et la somme de la série entière est

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \\ &= \frac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^{n+1}\right)' = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{x}{2(1-x)^2}. \end{aligned}$$

2) Soit $u_n = \frac{n^b}{n^2+n^a}$, terme positif.

Si $a > 2$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{a-b}}$. Dans ce cas, CV ssi $a - b > 1$.

Si $a < 2$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2-b}}$. Dans ce cas, CV ssi $2 - b > 1$.

Si $a = 2$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2-b}}$. Dans ce cas, CV ssi $2 - b > 1$.

Finalement CV ssi $(a > \max(2, 1+b)$ ou $(b < 1, a \leq 2))$.