DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Corrigé du partiel, Année 2002-2003.

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $u_n = \frac{n!}{a^n n^n} > 0$. On calcule

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}(n+1)^{n+1}},$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{a}e^{-n\ln(1+1/n)}.$$

Comme

$$\ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n,$$

on obtient que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{ae}.$$

Le critère de D'Alembert donne alors

$$\sum u_n \text{ converge pour } \frac{1}{ae} < 1, \qquad \sum u_n \text{ diverge pour } \frac{1}{ae} > 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum u_n \text{ converge pour } a > 1/e, \qquad \sum u_n \text{ diverge pour } a < 1/e.$$

Remarque : on peut aussi déterminer s'il y a convergence ou non pour le cas $a = 1/e$, c'est alors un des exemples de la feuille de Td (exercice 1). On remarque que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = ee^{-n\ln(1+1/n)} = e^{n(1/n-\ln(1+1/n))},$$

et que $x - \ln x \geq 0$ pour $x > 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, et ainsi par récurrence $u_n \geq u_1 = e$ quelque soit n. Le terme général u_n ne tend donc pas vers 0 et donc la série $\sum u_n$ diverge.
En conclusion,

$$\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } a > 1/e.$$

Exercice 2

1. Pour $\alpha \leq 0$,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n},$$

et $1/\ln n$ est positif et le terme général d'une série divergente puisque

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

et que $1/n$ est le terme général d'une série divergente. Ainsi par le théorème sur les équivalents, on obtient que

$$\sum u_n \text{ diverge pour } \alpha \leq 0.$$

2. Pour $\alpha > 0$,

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha},$$

et $1/n^\alpha$ est positif et le terme général d'une série convergente si et seulement si $\alpha > 1$, donc

$$\sum |u_n| \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

3. On procède comme à l'exercice 4 de la feuille 4 de Td. On écrit

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{(-1)^n n^\alpha}},$$

et on fait un développement limité de $1/(1+x)$ en 0, ce qui donne

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}\left(1 - \frac{\ln n}{(-1)^n n^\alpha} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right)\right),$$

et donc le résultat :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln n}{n^{2\alpha}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}\right).$$

4. On utilise la formule du 3.
Le terme $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère des séries alternées.
Pour $\alpha > 1/2$,

$$n^{\gamma-2\alpha}\ln n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \text{ si } \gamma > 2\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

et pour un tel γ, on a $\gamma > 1$, et donc $\frac{\ln n}{n^{2\alpha}}$ est le terme général d'une série convergente. Finalement d'après la formule du 3), on obtient que

$$\sum u_n \text{ est semi-convergente pour } 1 \geq \alpha > 1/2.$$

Pour $\alpha \leq 1/2$,

$$n^{1-2\alpha}\ln n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty,$$

donc $\frac{\ln n}{n^{2\alpha}} \geq \frac{1}{n}$, pour n assez grand, ce qui permet avec la formule 3. de conclure que

$$\sum u_n \text{ diverge pour } 0 < \alpha \leq 1/2.$$

Exercice 3

1. C'est classique et fait en Td. Il y a deux méthodes, avec une intégration par partie ou avec le théorème d'Abel. Soit $x \in]0,+\infty[$. Faisons-le avec Abel. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est localement intégrable sur $[x,+\infty[$ car continue sur cet intervalle. La fonction $t \mapsto 1/t$ est positive, décroissante,

de limite nulle et pour $a, b \in [x,+\infty[$,

$$|\int_a^b \sin t \, dt| = |\cos a - \cos b| \leq 2,$$

donc par le théorème d'Abel, on obtient que

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt \text{ est convergente.}$$

Pour $x = 0$, il faut aussi obtenir l'intégrabilité en 0 de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, ceci est vrai puisque $\frac{\sin t}{t}$ a pour limite 1 en 0 et est donc prolongeable par continuité.

2. On peut donc définir pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

(a) Pour $x = 0$, la relation est évidente. Soit $x, y > 0$, par la relation de Chasles, on a

$$\int_x^y \frac{\sin t}{t} \, dt = \int_0^y \frac{\sin t}{t} \, dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

Les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$ convergent d'après la question 1, donc on peut faire tendre $y \to +\infty$ et on trouve

$$f(x) = f(0) - \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt.$$

(b) La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$, prolongée par la valeur 1 en 0 est continue sur $[0,+\infty[$, d'après le rappel de l'énoncé, on en déduit que $x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, dt$ est dérivable et donc continue sur $[0,+\infty[$. La formule de la question précédante permet alors de conclure que f est continue et donc localement intégrale sur $[0,+\infty[$.

3. Etude en $+\infty$.

(a) Soient $x, y > 0$, par une intégration par partie, on a

$$f(x) = -\frac{\cos y}{y} + \frac{\cos x}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} \, dt,$$

puis par une seconde intégration par partie, on trouve

$$f(x) = -\frac{\cos y}{y} + \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin y}{y^2} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^y \frac{2\sin t}{t^3}\, dt.$$

L'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\, dt$ est convergente (règle d'Abel ou CVA), de plus les quantités $\frac{\cos y}{y}$ et $\frac{\sin y}{y^2}$ tendent vers 0 lorsque $y \to +\infty$, donc on peut passer à cette limite et on obtient

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\, dt.$$

(b) Pour $x > 0$,

$$\left| \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\, dt \right| \leq \int_x^{+\infty} \left| \frac{2\sin t}{t^3} \right|\, dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{2}{t^3}\, dt = \frac{1}{x^2}.$$

4. D'après le 2), f est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. D'après le 3),

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\, dt.$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{\cos x}{x}$ et $x \mapsto \frac{\sin x}{x^2}$ sont intégrables en $+\infty$ d'après le théorème d'Abel. La fonction $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{2\sin t}{t^3}\, dt$ est majorée en valeur absolue par $\frac{1}{x^2}$ (qui est intégrable en $+\infty$) donc elle est absolumemt convergente en $+\infty$ et donc aussi convergente.
Finalement f est intégrable en $+\infty$ comme la somme de trois fonctions qui sont intégrables en $+\infty$.
En conclusion

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge.}$$

Remarque sur les questions 2 et 3 : il est préférable d'utiliser la relation de Chasles et la formule d'intégration par partie sur des intervalles avec des bornes finies et passer ensuite à la limite.