DEUG MIAS 2ème année, Analyse, Semestre 1,
Corrigé succint du partiel, Année 2003-2004.

Exercice 1

1. La fonction $x \mapsto \frac{1}{(x-a)(1+bx)}$ est localement intégrable sur $[c, +\infty[$ (puisque continue sur cet intervalle) sauf au point a si $c \leq a$.
   Pour $b = 0$, $\frac{1}{(x-a)(1+bx)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ et donc l'intégrale diverge.
   Pour $b \neq 0$, $\frac{1}{(x-a)(1+bx)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{bx^2}$, ainsi on a convergence en $+\infty$. Dans le cas $c > a$, on a donc une intégrale généralisée convergente et pour $c \leq a$ divergente car $\frac{1}{(x-a)(1+bx)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{(x-a)(1+ba)}$.

2. En utilisant le développement limité $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \underset{y\to 0}{o}(y^2)$, on a
   $$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
   Maintenant $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère des séries alternées et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et donc aussi $\sum \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n^2})$. D'où finalement $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

3. Théorème sur les équivalents (voir cours) et ici
   $$\frac{1}{(n-1)(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geq 0,$$
   terme d'une série convergente, d'où la convergence. On pose $S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ les sommes partielles. On a la décomposition en éléments simples suivante
   $$\frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right),$$
   d'où
   $$S_N = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{3}{4},$$
   et donc la somme de la série est $3/4$.

Exercice 2

1. On trouve
   $$\int_1^X x\cos(x^3)\,dx = \int_1^{X^3} \frac{\cos y}{3\sqrt[3]{y}}\,dy.$$

2. Enoncé du théorème d'Abel : voir cours. Ici $y \mapsto \frac{1}{y^a}$ est positive, décroissante et de limite 0 en $+\infty$ car $a > 0$. De plus pour tout $X \in [1, +\infty[$, $|\int_1^X \cos y \, dy| = |[\sin y]_1^X| \leq 2$, donc le théorème s'applique et on obtient la convergence.

3. La fonction $x \mapsto x\cos(x^3)$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$ puisque continue sur cet intervalle. Il reste juste à étudier la convergence en $+\infty$. On a
$$\int_1^X x\cos(x^3)\, dx = \int_1^{X^3} \frac{\cos y}{3\sqrt[3]{y}}\, dy,$$
et le second membre a une limite lorsque $X \to +\infty$ (puisque d'après la question 2), l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos y}{y^{1/3}}\, dy$ converge), et donc le premier membre a aussi une limite lorsque $X \to +\infty$. Ceci donne la convergence de $\int_1^{+\infty} x\cos(x^3)\, dx$, et donc celle de $\int_0^{+\infty} x\cos(x^3)\, dx$.

Exercice 3

1. (a) Voir cours et/ou TD.
   (b) Voir TD : on somme les inégalités du a) de $k = n_0$ à $k = N$, on utilise Chasles puis on fait $N \to +\infty$ ce qui est valide car toutes les quantités obtenues sont convergentes.

2. (a) $\frac{1}{k^4+a^4} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^4} \geq 0$, terme d'une série convergente, d'où la convergence de S_a.
   (b) Faire le changement de variable $x = ua$ sur un intervalle $[b, X]$ avec $X \in [b, +\infty[$, puis faire tendre $X \to +\infty$, ce qui est possible car les deux intégrales concernées sont convergentes car équivalentes en $+\infty$ à $1/y^4$...

3. On utilise pour a fixé la fonction $f(x) = \frac{1}{x^4+a^4}$, d'où par la question 1) avec $n_0 = 1$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\, dx \leq S_a \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+a^4}\, dx,$$
d'où, en utilisant la question 2),
$$\frac{1}{a^3}\int_{1/a}^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}\, du \leq S_a \leq \frac{1}{a^3}\int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}\, du,$$
d'où
$$0 \leq a^3 S_a \leq C, \qquad \text{avec } C = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^4+1}\, du < +\infty.$$
Et donc
$$0 \leq S_a \leq \frac{C}{a^3} \underset{a\to+\infty}{\to} 0,$$
et donc S_a a pour limite 0 lorsque $a \to +\infty$.