Université de Nice – Sophia Antipolis 2004–2005
Licence MI2

Intégrales et Séries

Examen du 22 novembre 2004

Nom :
Prénom :

Durée : 1h30
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Note :

CORRECTION

Exercice 1 : (5 points)

1) Montrer (de manière succinte) que $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente, avec $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)^2}$.

f est continue sur $[3,+\infty[$ donc localement intégrable sur $[3,+\infty[$.

Etude en $+\infty$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}$ or $\begin{cases} \frac{1}{x^3} \geq 0 \\ \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \text{ CV car } 3>1 \end{cases}$

donc par le théorème d'équivalence, $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ CV.

On cherche maintenant à calculer la valeur de cette intégrale.

2) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $f(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} \qquad (1)$$

- On multiplie (1) par $x-2$ d'où

$$\frac{1}{(x-1)^2} = a + b\,\frac{x-2}{x-1} + c\,\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

on applique en $x=2$: $1 = a$

• On multiplie maintenant (1) par $(x-1)^2$ d'où

$$\frac{1}{x-2} = \frac{a\,(x-1)^2}{x-2} + b\,(x-1) + c$$

on applique en $x = 1$: $\quad -1 = c$

• On multiplie finalement (1) par $(x-1)$:

$$\frac{1}{(x-2)(x-1)} = a\,\frac{x-1}{x-2} + b + \frac{c}{x-1}$$

On fait tendre $x \to +\infty$, d'où $0 = a + b$ et donc $b = -1$.

Finalement, on trouve

$$f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

3) Calculer la valeur de $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$.

Soit $X \in [3, +\infty[$,

$$\int_3^X f(x)\,dx = \int_3^X \frac{1}{x-2}\,dx - \int_3^X \frac{1}{x-1}\,dx - \int_3^X \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$

$$= \Big[\ln|x-2|\Big]_3^X - \Big[\ln|x-1|\Big]_3^X + \Big[\frac{1}{x-1}\Big]_3^X$$

$$= \ln(X-2) - \ln(X-1) + \ln 2 + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2}$$

$$= \ln\frac{X-2}{X-1} + \ln 2 + \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} \xrightarrow[X \to +\infty]{} \ln 2 - \frac{1}{2}$$

D'où $\underline{\int_3^{+\infty} f(x)\,dx = \ln 2 - \frac{1}{2}}$.

Exercice 2 : (5 points)

1) A l'aide d'une intégration par partie, calculer (pour $X \in [1, +\infty[$), $\int_1^X t\,\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$.

On pose $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{1+t^2}\,\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d'où $$\int_1^X t\,\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = \Big[-\frac{t}{2(1+t^2)}\Big]_1^X + \frac{1}{2}\int_1^X \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\int_1^X t\,\frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt = -\frac{X}{2(1+X^2)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big[\arctan t\Big]_1^X$$

$$= -\frac{X}{2(1+X^2)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan X - \frac{1}{2}\arctan 1$$

$$= -\frac{X}{2(1+X^2)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan X - \frac{\pi}{8}$$

2) A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$, calculer (pour $Y \in [0,1[$), $\int_0^Y \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du$.

$t = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$, $t^2 = \frac{1+u}{1-u}$ càd $u = \frac{t^2-1}{t^2+1} = 1 - \frac{2}{t^2+1}$

$$du = \frac{+4t}{(t^2+1)^2}\,dt$$

pour $u=0$, $t=1$ et pour $u=Y$, $t=\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}}$

d'où $$\int_0^Y \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = \int_1^{\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}}} t\left(\frac{4t}{(t^2+1)^2}\right)dt$$

$$= +4\left[-\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{1+Y}{1-Y}} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\arctan\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}} - \frac{\pi}{8}\right]$$

$$= -\sqrt{1-Y^2} + 1 + 2\arctan\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}} - \frac{\pi}{2}$$

4) En déduire la convergence et le calcul éventuel de $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du$.

quand $Y \to 1^-$, $\sqrt{\frac{1+Y}{1-Y}} \longrightarrow +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

donc $$\lim_{Y\to 1^-} \int_0^Y \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = +1 + \pi - \frac{\pi}{2} = +1 + \frac{\pi}{2}$$

donc $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du$ converge et $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du = +1 + \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : (4 points)

1) Montrer que $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n\ln n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

or $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

appliquant ceci avec $x = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on trouve

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{1}{n\ln n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

2) Montrer que $\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

$$\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)} \quad \text{or} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}$$

(comme ci dessus)

d'où
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln n}$$

donc $n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\left(1+\frac{1}{n\ln n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

3) Etudier la nature de $\sum \frac{(\ln n)^n}{n!}$.

On pose $u_n = \frac{(\ln n)^n}{n!}$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(\ln(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(\ln n)^n} = \underbrace{\frac{\ln(n+1)}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\, 0}\;\underbrace{\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\, 1}$$

d'après le 1) et 2)

donc $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$

donc par la règle de d'Alembert, $\sum \frac{(\ln n)^n}{n!}$ CV.

Exercice 4 : (7 points)

1) On pose $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ pour $x > 0$. Calculer $f'(x)$. En déduire que f est décroissante sur $[2, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{x^2} + \ln x\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Pour $x \geq 2$, $\ln x \geq \ln 2$ donc $-2\ln x \leq -2\ln 2$

donc $1-2\ln x \leq 1-2\ln 2 \leq 0$

donc $f'(x) \leq 0$ et donc f est décroissante.

2) Calculer $\int_n^N f(x)\,dx$ pour $2 < n < N$ des entiers. Puis en déduire la convergence de $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$.

$$\int_n^N \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_n^N + \int_n^N \frac{1}{x^2}\,dx$$

$u(x) = \ln x$, $u'(x) = \frac{1}{x}$, $v'(x) = \frac{1}{x^2}$, $v(x) = -\frac{1}{x}$

donc $\int_n^N f(x)\,dx = -\frac{\ln N}{N} + \frac{\ln n}{n} + \left[-\frac{1}{x}\right]_n^N$

$= -\frac{\ln N}{N} + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{N} + \frac{1}{n}$

Quand $N \to +\infty$, $\int_n^N f(x)\,dx \longrightarrow \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$

d'où la convergence de $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ et sa valeur : $\int_n^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$.

3) Montrer que, pour $2 \leq n < N$ des entiers,

$$\int_{n+1}^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_n^N f(x)\,dx. \qquad (2)$$

f est décroissante donc $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\,dx = f(k)\int_k^{k+1} dx$

$\leq f(k)$

et de même $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$,

d'où $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

En sommant ces relations entre $k = n+1$ et N :

$$\int_{n+1}^{N+1} f(x)\,dx = \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_n^N f(x)\,dx.$$

relation de Chasles   relation de Chasles

4) En déduire la convergence de $\sum_{k=3}^{+\infty} f(k)$.

$\sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$.

Pour $n = 2$: $\sum_{k=3}^{N} f(k) \leq \frac{\ln 2 - 1}{2}$ or $f(k) \geq 0 \quad \forall k \geq 3$

donc les sommes partielles de cette série à termes positifs sont majorées donc $\sum_{k=3} f(k)$ CV.

5) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ pour $n \geq 2$. Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

R_n converge donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} f(k) = R_N$

$\int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ converge donc $\lim_{N\to+\infty} \int_n^N f(x)\,dx = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$

et de même $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{n+1}^{N} f(x)\,dx = \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans (2), on trouve :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

6) En déduire un équivalent de R_n quand $n \to +\infty$.

Ainsi $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} \leq R_n \leq \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{1}{n}$

donc $\underbrace{\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\dfrac{n}{n+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} - \underbrace{\dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\ln n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \leq R_n \dfrac{n}{\ln n} \leq 1 - \underbrace{\dfrac{1}{\ln n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

donc $R_n \dfrac{n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$,

et donc $\underline{R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}}$.

Exercice 5 : (3 points) (Question de cours)
Etudier la divergence, semi-convergence et convergence absolue pour $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour $\alpha \leq 0$, $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge.

Pour $\alpha > 0$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$ terme d'une série convergente si et seulement si $\alpha > 1$

donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ CVA ssi $\alpha > 1$.

Reste le cas où $\alpha \in]0, 1]$,

alors on utilise le critère des séries alternées car $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est décroissante, positive et de limite nulle dans ce cas.

Ainsi $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge, mais comme elle n'est pas absolument convergente dans ce cas, on en déduit que

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ semi-convergente pour $\alpha \in]0, 1]$.