Maîtrise de Mathématiques, Université de Nice Sophia-Antipolis,
Analyse Approfondie, Feuille 7, Année 2004-2005.

Exercice 1 (Equation de transport et conditions initiales et aux limites)

1. Soit $a \neq 0$. Résoudre
$$\partial_t f + a\partial_x f = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0,$$
avec la condition initiale $f(0,x) = f^0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Soit $a \neq 0$. Résoudre
$$\partial_t f + a\partial_x f = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \geq 0,$$
avec la condition initiale $f(0,x) = f^0(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, et la condition de bord $f(t,0) = f^b(t)$, $\forall t \geq 0$. (On fait l'hypothèse que $f^0(0) = f^b(0)$.)

Exercice 2 (Méthode des caractéristiques)

Soient $f(x)$ et $g(t,x)$ deux fonctions données. Résoudre les EDP d'inconnue $u(t,x)$:

$$\begin{array}{lll} 1. & \partial_t u + x\partial_x u = 0, & u(0,x) = u^0(x), \\ 2. & t\partial_t u + x\partial_x u = 0, & u(1,x) = f(x), \\ 3. & t\partial_t u + x\partial_x u = g, & u(1,x) = f(x), \\ 4. & t\partial_t u + x\partial_x u = 2u, & u(1,x) = f(x), \end{array}$$

Exercice 3 (Equation de Bürgers)

1. On considère d'abord l'équation différentielle ordinaire de Riccati $y' := dy/dt = -y^2$, pour $t \geq 0$, avec la condition initiale $y(0) = y_0$, y_0 donnée quelconque dans $\mathbb{R}$. Expliciter la solution, tracer son graphe et préciser en fonction de y_0 si elle "explose" pour $t \geq 0$ et si oui à quel instant.

2. On considère l'équation de Burgers, pour x dans $\mathbb{R}$ et $t > 0$:
$$\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0, \tag{1}$$
à laquelle on ajoute la condition initiale :
$$u(0,x) = u_0(x) \text{ dans } \mathbb{R}. \tag{2}$$
Soit u une solution de (1) bornée et par exemple de classe C^1 en x et t. On introduit les *courbes caractéristiques,* i.e. les solutions de la famille d'EDO :
$$dX/ds = u(s,X)\ . \tag{3}$$
Pour tout t,x fixé on note $X(s,t,x)$ l'unique solution de (3) telle que $X(t,t,x) = x$. Calculer $du/ds(s,X(s,0,x))$. En déduire dX/ds puis $X(t,0,x)$ pour tout couple (t,x).

3. Pour $t \geq 0$ fixé, soit x tel qu'il existe un unique y pour lequel $X(t,0,y) = x$. A l'aide de la question 2, expliciter x en fonction de y, t et $u_0(.)$. A quelle condition peut-on résoudre cette équation à l'inconnue y ? Si c'est le cas, exprimer $u(t,x)$ en fonction de $u_0(y)$.

4. Si $u_0 \in C_b^1$ (i.e. si u_0 et du_0/dx sont continues et bornées), en déduire qu'en général il existe un temps maximal T_{max} tel que pour tout $T \in]0, T_{max}]$ le problème (1)-(2) admet une solution u de classe C^1, définie de manière unique pour $(t,x) \in [0,T[\times\mathbb{R}$. Donner un lien entre T_{max} et u_0.

5. Que devient T_{max} si de plus du_0/dx reste positive ou nulle pour tout x?

6. Maintenant soit u une solution de l'équation (1) de classe C_b^2 en x,t. On pose $v := du/dx$. En dérivant l'équation (1) par rapport à x, calculer $\partial_t v + u\partial_x v$. Qu'en déduisez-vous sur l'évolution de v le long d'une caractéristique issue d'un point où du_0/dx est négative? Que pensez-vous de T_{max} dans ce cas ?