Université de Nice – Sophia Antipolis 2004–2005
Licence MI2

Intégrales et Séries

Examen du 24 janvier 2005

Nom :
Prénom :

**Durée :** 2h00
Les documents, calculatrices,... ne sont pas autorisés.

Note :

**Exercice 1 : (5 points)**

1) Etudier la convergence simple de la **suite** de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = \dfrac{2x - n^2x^3}{1+n^2x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. (En particulier, on donnera l'expression de la limite simple $f(x)$ obtenue et on précisera l'ensemble $D$ sur lequel la convergence simple a lieu.)

Pour $x \neq 0$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^2x^3}{n^2x^2} = x$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = x$ pour $x \neq 0$.

Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Finalement $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = x \quad \forall x \in D = \mathbb{R}$.

2) Etudier les variations de $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$ sur $D$.

$$\varphi_n(x) = \frac{2x + n^2x^3}{1+n^2x^2} - x = \frac{2x - n^2x^3 - x - n^2x^3}{1+n^2x^2}$$

$$= \frac{x}{1+n^2x^2}$$

$$\varphi_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x(2nx^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

donc

$$\varphi_n'(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

du signe de $1 - n^2 x^2 = (1 - nx)(1 + nx)$

d'où le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{n}$ | | $\frac{1}{n}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\varphi_n(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2n}$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2n}$ | $\searrow$ | $0$ |

3) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f$ sur $D$.

$$\sup_{n \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{2n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers $f$ sur $D = \mathbb{R}$.

**Exercice 2 : (9 points)**
On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$4x\,y'' + 2y' + y = 0. \tag{1}$$

à l'aide des séries entières.
1) On suppose qu'il existe une solution $y$ de (1) développable en série entière : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in ]-R, R[$ avec $R > 0$ et telle que $y(0) = 1$.
a) Que vaut $a_0$ ?

$$y(0) = a_0 \quad \text{donc} \quad a_0 = 1$$

b) Calculer $a_{n+1}$ en fonction de $a_n$ pour $n \geq 1$ et donner la valeur de $a_1$ en fonction de $a_0$.

Sur $]-R, R[$, on a $\quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

donc $4xy'' + 2y' + y = 0$ devient pour cette série entière $y$ :

$$4x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

càd :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

Par le changement d'indice $m = n-1$ :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{m=1}^{+\infty} 4(m+1)m\, a_{m+1} x^m$$

et de même :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1) a_{m+1} x^m$$

d'où $\sum_{m=1}^{+\infty} 4(m+1)m\, a_{m+1}\, x^m + \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1)\, a_{m+1}\, x^m + \sum_{m=0}^{+\infty} a_m\, x^m = 0$

et donc $\sum_{m=1}^{+\infty} \left[ 4(m+1)m\, a_{m+1} + 2(m+1)a_{m+1} + a_m \right] x^m + 2a_1 + a_0 = 0$

Par unicité du développement en série entière, on a donc

$$\begin{cases} 2a_1 + a_0 = 0 \\ 4(m+1)\, m\, a_{m+1} + 2(m+1)\, a_{m+1} + a_m = 0 \quad \text{pour } m \geq 1 \end{cases}$$

La dernière expression se réécrit : $\underline{2(m+1)(2m+1)\, a_{m+1} + a_m = 0}$, pour $m \geq 1$.

2) En déduire que $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ pour tout $n$.

On a donc $a_{n+1} = -\dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)}\, a_n \quad \forall n \geq 1$

et donc $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\dots 4.3}\, a_1$

or $a_1 = -\dfrac{a_0}{2}$ et $a_0 = 1$ d'où

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ pour $n \geq 1$. Encore vrai pour $n = 0$.

4) Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc par le th. d'Alembert sur les séries entières,

le rayon de convergence $R$ de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $R = +\infty$.

5) a) Donner le développement en série entière au point 0 de $\cos x$. (On précisera pour quelles valeurs de $x$ le développement est vrai.)

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

b) En déduire les valeurs $b_n$ telles que $\cos(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ pour tout $x \geq 0$.

on remplace $x$ par $\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ :

$$\cos \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \quad \text{pour } x \geq 0, \text{ càd } b_n = a_n.$$

c) On rappelle que $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
Calculer le développement en série entière au point 0 de $\operatorname{ch} x$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

donc $$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{\substack{n=0 \\ n=2p \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=2p+1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair } n=2p}}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n=2p+1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} - \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\Bigg)$$

et donc $$\operatorname{ch} x = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

d) En déduire les valeurs $c_n$ telles que $\operatorname{ch}(\sqrt{-x}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ pour tout $x \leq 0$.

on remplace $x$ par $\sqrt{-x}$ pour $x \leq 0$ :

$$\operatorname{ch}(\sqrt{-x}) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-x)^p}{(2p)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n \quad \text{pour } x \leq 0,$$

càd $c_n = a_n$.

6) Conclure à l'expression de la solution de (1) telle que $y(0) = 1$ obtenue.

On a donc
$$y(x) = \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{pour } x \geq 0, \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-x}) & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

**Exercice 3 : (8 points)**

Soit $f$ une fonction $2\pi$ périodique, deux fois dérivable et avec une dérivée seconde continue.

1) On note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ les coefficients de Fourier de $f$ et $S(f)(x)$ la série de Fourier de $f$ en $x$. Rappeler la définition de $a_n(f)$, $b_n(f)$ et $S(f)(x)$.

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt$$
$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1$$
$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1$$
$$S(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right]$$

2) Pourquoi $S(f)(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(x)$ ?

<u>Th de Dirichlet</u> : $f$ $2\pi$-périodique et dérivable par morceaux,
alors $S(f)(x)$ CVS $\forall x \in \mathbb{R}$ et
$$S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Comme $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$, on a
$$f(x^+) = f(x^-) = f(x) \quad \text{et donc} \quad S(f)(x) = f(x)$$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

3) On note $a_n(f')$ et $b_n(f')$ les coefficients de Fourier de $f'$. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$a_n(f) = -\frac{1}{n}b_n(f'), \qquad b_n(f) = \frac{1}{n}a_n(f').$$

(On pourra penser à l'intégration par partie.)

IPP : $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,dt$

or $\sin(n\pi) = 0$ et $\sin(-n\pi) = 0$ d'où

$$a_n(f) = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(nt)\,dt\right) = -\frac{1}{n}\, b_n(f')$$

IPP : $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\left[-f(t)\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\cos(nt)}{n}\,dt$

càd $b_n(f) = \frac{-1}{\pi n}\Big(f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)\Big)$

$$+ \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt$$

$f$ est périodique, de période $2\pi$, donc $f(\pi) = f(-\pi)$.
Comme de plus $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$, on a donc

$$b_n(f) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(nt)\,dt\right) = \frac{1}{n}\, a_n(f').$$

4) On note $a_n(f'')$ et $b_n(f'')$ les coefficients de Fourier de $f''$. Déduire de la question 3)
a) une formule entre $a_n(f)$ et $a_n(f'')$ pour $n \geq 1$.

En appliquant le 3) à $f'$, on a $b_n(f') = \frac{1}{n}\, a_n(f'')$

et donc $a_n(f) = -\frac{1}{n}\, b_n(f') = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\, a_n(f'')\right)$

càd $a_n(f) = -\frac{1}{n^2}\, a_n(f'')$.

b) une formule entre $b_n(f)$ et $b_n(f'')$ pour $n \geq 1$.

En appliquant le 3) à $f'$, on a $a_n(f') = -\frac{1}{n}\, b_n(f'')$

et donc $b_n(f) = \frac{1}{n}\, a_n(f') = \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\, b_n(f'')\right)$

càd $\quad b_n(f) = -\dfrac{1}{n^2}\, b_n(f'')$.

5) On rappelle que si $g$ est une fonction continue et $2\pi$ périodique, alors la fonction $g$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe une constante $M_g$ telle que $|g(t)| \leq M_g$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
a) Montrer que $|a_n(f'')| \leq 2M_{f''}$ et $|b_n(f'')| \leq 2M_{f''}$ pour tout $n \geq 1$.

$$|a_n(f'')| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f''(t)|}_{\leq M_{f''}} \cdot \underbrace{|\cos(nt)|}_{\leq 1}\, dt \leq M_{f''}\frac{2\pi}{\pi}$$

$$|a_n(f'')| \leq 2M_{f''}.$$

De même, on a $\quad |b_n(f'')| \leq 2M_{f''}$.

b) En déduire que pour $n \geq 1$,

$$|a_n(f)| \leq \frac{2M_{f''}}{n^2}, \qquad |b_n(f)| \leq \frac{2M_{f''}}{n^2}.$$

$$|a_n(f)| = \left|\frac{1}{n^2}\, a_n(f'')\right| \leq \frac{2M_{f''}}{n^2}$$

et de même pour $b_n(f)$.

c) En déduire que la série de Fourier $S(f)(x)$ converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

Du b), on déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)|$$
$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |\cos(nx)|\cdot|a_n(f)| + \sup_{x\in\mathbb{R}}|\sin(nx)|\cdot|b_n(f)|$$
$$\leq \frac{4M_{f''}}{n^2} \quad \text{or} \quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \text{ CV par Riemann } (\alpha = 2 > 1)$$

d'où $\sum \sup_{x\in\mathbb{R}} |a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)|$ CV,

càd que $S(f)(x)$ CVN sur $\mathbb{R}$. Comme la CVN sur $I$ implique la convergence uniforme sur $I$ : $S(f)(x)$ CVU sur $\mathbb{R}$.