Rudiments en optimisation de structures élastiques

B. Rousselet [1] [2]

dec 2001

[1] *Laboratoire de Mathématiques, Parc Valrose, F 06108 Nice, Cédex 2, email :* br@math.unice.fr

[2] *réalisé par l'auteur avec l'aide technique de A. Omrane et le support financier du P.E.C. Tempus No 07 228-94 "Shape optimal design, application to structures and environment"*

Table des matières

Table des figures

Chapitre 1

Exemples classiques en Optimisation de structures

Nous considérons ici quelques problèmes d'optimisation de structures ; ce document est destiné à être introductif tout en amenant à considèrer une question en cours de recherche, l'optimisation de structures en grand déplacements en présence d'instabilités ; on s'est limité à des modèles de poutre ainsi qu'à des petits modèles à quelques degrés de liberté ; ces petits modèles manifestent des comportements compliqués dûs aux grands déplacements ; dans certaines situations on arrive malgré tout à des solutions explicites.
Dans le cas où la structure est analysée en élasticité linéaire, leur optimisation est beaucoups plus maîtrisée ainsi qu'on le constate dans le §1.
Ce document est centré sur la modélisation et la solution explicite de problèmes d'optimisation de structures ; cela ne doit pas faire oublier que l'utilisation effective par l'ingénieur repose sur des outils numériques :
- les éléments finis pour l'analyse des structures.
- des algorithmes d'optimisation auquels on fournit les applications de sensitivité des fonctionelles et contraintes considérées.
(voir par exemple Haftka - Kamat [?] 1985 , Haug - Choi - Kowkov [?] 1986 , Céa [?] 1981).

1.1 Introduction.

Nous considérons dans ce chapitre des exemples classiques d'optimisation de structures continues, analysées en élasticité linéaire.

Ces exemples sont suffisement simples pour que l'on ne soit pas noyé dans les calculs fastidieux et que l'on puisse constater le genre de solution que l'on peut obtenir.
Le lecteur est supposé habitué aux principes de base de la mécanique des poutres rectilignes (équations locales et principe des travaux virtuels), en particulier le maniment de charges concentrées (nous les désignons par masse de Dirac suivant l'usage mathématique) au second membre d'équations différentielles.
Pour les solutions optimales, un livre de référence, Banichuk [?].

1.2 Un exemple simple en guise d'introduction.

Nous considérons d'abord un exemple mathématique très simple ; nous verrons à la fin du §1.2 une interprétation mécanique.
Considérons l'exemple suivant :
Soit le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{trouver } u_\alpha \textit{ nul en } x = \pm\,\ell \textit{ solution de l'équation variationelle} : \\ \textit{pour tout } v \textit{ nul en } x = \pm\,\ell \;, \\ \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \alpha u' v' dx \;=\; q\,v(0) \;=q\; < \delta, v >\,, \;\; \delta \;:\; \textit{masse de Dirac en } x = 0 \;. \end{array}\right. \tag{1.1}$$

α fonction de x est une <u>variable de conception</u> ; le problème de <u>conception optimale</u> consiste à minimiser :

$$j_0(\alpha) \;=\; J_0(u_\alpha) \;=\; q\,u_\alpha(0) \tag{1.2}$$

sous la contrainte $j_1(\alpha) = c_1$ avec

$$j_1(\alpha) \;=\; \int_{-\ell}^{\ell} \alpha\, dx \tag{1.3}$$

et,

$$c_1 \;\; \text{constante donnée.} \tag{1.4}$$

A l'aide d'intégration par parties trouvons les <u>équations locales</u> associées à (2.1) :

$$-\int_{-\ell}^{\ell} (\alpha\, u')'\, v\, dx \;\;+\;\alpha\, u'\, v\Big|_{-\ell}^{0^-} \;+\; \alpha u' v\Big|_{0^+}^{\ell} \;=\; q\;v(0) \tag{1.5}$$

d'où en dehors de zéro :

$$-(\alpha u')' \;=\; 0 \quad \text{dans }]-\ell, 0[\text{ et }]0, +\ell[, \tag{1.6}$$

et la relation de saut en $x = 0$ où est appliqué le second membre concentré $q\,\delta$:

$$\alpha\left(\,u'(0^-)\;-\;u'(0^+)\,\right)\;=\;q\,. \tag{1.7}$$

A cela il convient de rajouter les conditions aux limites bloquées :

$$\left\{\begin{array}{l} u\,(-\,\ell\,)\;=\;0 \\ \\ u\,(+\,\ell\,)\;=\;0. \end{array}\right. \tag{1.8}$$

L'équivalence de (1.6), (1.7), (1.8) avec (1.1) est classique (cf. Dautray- Lions [**?**]). Considérons maintenant les conditions d'optimalité pour (1.2), (1.3) ; formons le Lagrangien associé (voir par exemple Luenberger [**?**], 1969).

$$L(\alpha,\lambda)\;=\;j_0(\alpha)\;+\;\lambda\,(j_1(\alpha)-c_1)\;\;avec\;\lambda\in I\!R. \tag{1.9}$$

la condition nécessaire d'optimalité s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial\alpha}(\alpha,\lambda)\;\delta\alpha=0\;\;\text{pour tout}\;\delta\alpha \\ \\ j_1(\alpha)-c_1\;=\;0. \end{array}\right. \tag{1.10}$$

Explicitons, en admettant que la fonction implicite $\alpha\longrightarrow u_\alpha(0)$ est différentiable,

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha}\;\delta\alpha\;=\;q\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}(0)\,\delta\alpha\;+\;\lambda_1\int_{-\ell}^{\ell}\delta\alpha dx \tag{1.11}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}(0)\;\delta\alpha$ doit être détеminé pour toute utilisation numérique ou explicite de (1.10) et (1.11).

Pour cela il convient de dériver par rapport à α l'équation d'équilibre (1.1) :

$$\int_{-\ell}^{\ell}\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha}\;\delta\alpha\right)'\,v'\;\;+\;\;\int_{-\ell}^{\ell}\delta\alpha\,u'\,v'dx\;\;=\;0. \tag{1.12}$$

Constatons d'autre part que $\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}(0)\;\delta\alpha$ est un choix possible de v (on a bien $\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}(\pm\ell)=0$) dans (1.1), il vient donc

$$q\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}(0)\delta_\alpha\;\;=\;\;\int_{-\ell}^{\ell}\alpha\,u'\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}\;\delta\alpha\right)'\,dx \tag{1.13}$$

d'où avec l'équation dérivée (1.12) où l'on fait $v = u$

$$q\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial\alpha}(0)\,\delta\alpha\;\;=\;-\int_{-\ell}^{\ell}\delta\alpha\;(u')^2\,dx. \tag{1.14}$$

Finalement la condition d'optimalité (1.10) peut s'expliciter à l'aide de (1.11) et (1.14) :

$$\left\{\begin{array}{l} -\displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \delta\alpha\ (u')^2\, dx \ +\ \lambda_1 \int_{-\ell}^{\ell} \delta\alpha\ dx \ =\ 0 \\ \\ \displaystyle\int_{-\ell}^{\ell} \alpha(x)\ dx \ =\ c_1 \end{array}\right. \tag{1.15}$$

La première relation implique alors la forme locale de la condition d'optimalité :

$$-{u'}^2 \,+\, \lambda_1 \,=\, 0 \quad \textit{i.e.}\ \ {u'}^2\ \textit{est constant.} \tag{1.16}$$

pour poursuivre la résolution remarquons que $v = u$ dans (1.1) fournit :

$$q\, u(0) \ =\ \int_{-\ell}^{\ell} \alpha\ (u')^2\, dx \ =\ \lambda_1 \int_{-\ell}^{\ell} \alpha\ \ dx \ =\ \lambda_1\, c_1 \tag{1.17}$$

$$\text{soit} \quad q\, u(0) \ =\ \lambda_1\, c_1\ . \tag{1.18}$$

Pour achever la résolution, il faut résoudre explicitement (1.1) ou ce qui est plus commode pour une solution explicite, ici les équations locales (1.6), (1.7), (1.8).

(1.6) fournit :

$$\left\{\begin{array}{ll} -\,\alpha\ u' \ =\ c_- & \text{dans }]-\ell, 0[\\ \\ -\,\alpha\ u' \ =\ c_+ & \text{dans }]0, \ell[, \end{array}\right. \tag{1.19}$$

où c_- et c_+ sont deux constantes à déterminer.

(1.7) donne la relation

$$-\,c_- \ +\ c_+ \ =\ q\ . \tag{1.20}$$

La condition d'optimalité (1.16) rapprochée de (1.19) permet de conclure que :

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha \ =\ \alpha_- & \text{dans }]-\ell, 0[\\ \\ \alpha \ =\ \alpha_+ & \text{dans }]0, \ell[. \end{array}\right. \tag{1.21}$$

où α_- et α_+ sont deux constantes à déterminer ; en tenant compte des conditions aux limites en $x = \pm\ell$, (1.19) se résout :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\,\alpha_-\;u_- &=& c_-\,(x+\ell) \\ \\ -\,\alpha_+\;u_+ &=& c_+\,(x-\ell). \end{array}\right. \tag{1.22}$$

et la continuite en $x = 0$ de αu fournit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\alpha_-\;u(0) &=& c_-\;\ell \\ \\ -\alpha_+\;u(0) &=& -c_+\;\ell \end{array}\right. \tag{1.23}$$

d'où :

$$c_- \;=\; -\,c_+ \tag{1.24}$$

avec (1.20)

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_- &=& -\,\dfrac{q}{2} \\ \\ c_+ &=& +\,\dfrac{q}{2}. \end{array}\right. \tag{1.25}$$

Pour déterminer α_- et α_+, d'une part on reporte cette valeur de c_- et c_+ dans (1.23) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\alpha_-\,u(0) &=& -\,\dfrac{q}{2}\,\ell \\ \\ -\alpha_+\,u(0) &=& -\,\dfrac{q}{2}\,\ell, \end{array}\right. \tag{1.26}$$

d'où

$$\alpha_- \;=\; \alpha_+ \;=\; \alpha \tag{1.27}$$

finalement la contrainte :

$$\int_{-\ell}^{\ell} \alpha\; dx \;=\; c_1 \;\;\text{donne}\;\; 2\,\ell\,\alpha \;=\; c_1. \tag{1.28}$$

soit,

$$\alpha \;=\; \frac{c_1}{2\ell} \quad \text{et} \quad u(0) \;=\; \frac{q\,\ell.\,2\,\ell}{2.\;c_1} \;=\; \frac{q\,\ell^2}{c_1}. \tag{1.29}$$

On peut aussi déterminer le multiplicateur de lagrange avec (1.18), (1.29), $\lambda_1 = \dfrac{q\;u(0)}{c_1}$:

$$\lambda_1 \;=\; \frac{q^2\ell^2}{c_1^2}. \tag{1.30}$$

Ce dernier résultat est bien coherent avec (1.16).

En résumé :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_- & = & \dfrac{q\,\ell}{c_1}\,(x+\ell) \\ \\ u_+ & = & -\dfrac{q\,\ell}{c_1}\,(x-\ell). \end{array}\right. \tag{1.31}$$

et la valeur optimale de $J_0 \;=\; q\,u(0) \;=\; \dfrac{q^2\ell^2}{c_1}$

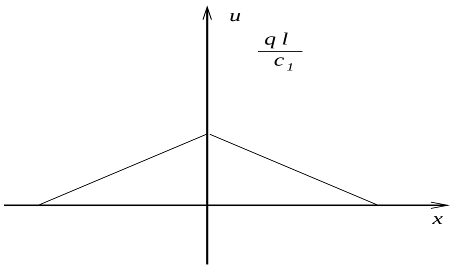

FIG. 1.1 – solution de l'équation (1.31)

Pour résoudre explicitement ce problème, nous avons utilisé à la fois la formulation variationelle et les équations locales ; ce travail a été possible car la fonction à minimiser s'exprime simplement à partir de la formulation variationelle et la contrainte est très simple.
Toutefois dans ce cas la solution est un peu décevante par sa simplicité : α est constant et sa valeur est déterminée par la constante c_1

Ceci est en fait bien raisonable dans une interprétation mécanique avec $\alpha(x) = E\,A(x)$, E module de Young, $A(x)$ aire de la section droite en x d'une barre de longueur 2ℓ et chargée en son centre par une force concentrée q ; cette barre est bloquée aux deux extrémités :

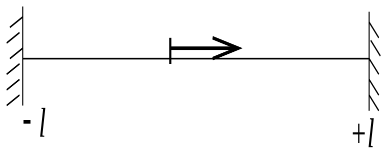

FIG. 1.2 – Barre bloquée chargée par une force centrée

Les parties droites et gauches doivent supporter un effort normal $n = EAu'$ egal en valeur absolue à $q/2$; il est donc raisonnable que cet effort normal soit supporté de façon optimale par une répartition uniforme de l'épaisseur.

1.3 Barre pesante d'élongation minimum.

Cet exemple est présenté par Verma et Keller [**?**] (la présentation de la solution est légèrement différente). L'origine mécanique est la suivante : comme dans l'interprétation donnée à la fin du §2, il s'agit d'une barre chargée le long de son axe : u désigne le déplacement longitudinal, l'allongement relatif est $\gamma = u'(x)$ et l'effort normal $n = EAu'(x)$ avec $A(x)$ aire de la section droite ; cette barre est fixée à une extrémité $x = 0$, elle est soumise à une force concentrée à son autre extrémité $x = \ell$ et à son poids propre : force répartie de densité linéique $\rho g A(x)$ avec ρ masse volumique du matériaux, g accélération de la pesanteur.

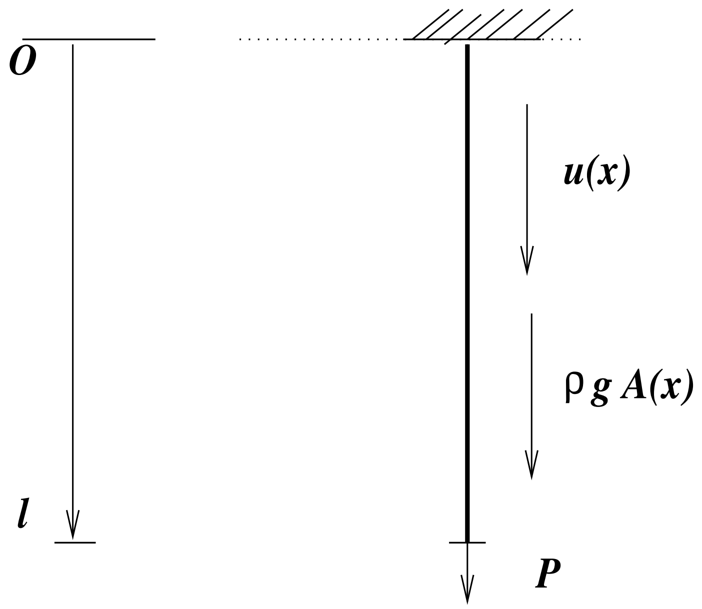

FIG. 1.3 – Barre chargée verticalement

Le principe des travaux virtuels (ou principe variationnel), s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u_A \text{ nul en } x = 0 \text{ telque pour } v \text{ nul en } x = 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^\ell n\ v'(x)\ dx \ = \ \int_0^\ell \rho\, g\, A\, v\, dx \ + \ P\, v(\ell) \text{ avec } n \ = \ E\, A\, u'. \end{array} \right. \tag{1.32}$$

Le problème de <u>conception optimale</u> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } j_0(A) \;=\; J_0(u_A) \;=\; u_A(\ell) \\ \\ \text{sous la contrainte} \\ \\ j_1(A) \;-\; V \;=\; 0 \quad \text{avec } j_1(A) \;=\; \displaystyle\int_0^\ell A(x)\,dx \end{array} \right. \tag{1.33}$$

Comme au paragraphe précédent, nous obtenons les équations locales équivalentes par intégration par parties dans l'équation (1.32).

$$-\int_0^\ell n'\,v\,dx \;+\; n\,v|_0^\ell \;=\; \int_0^\ell \rho\,g\,A\,v \;+\; P\,v(\ell) \tag{1.34}$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} -n' \;=\; \rho\,g\,A \quad \text{dans }]0,\,\ell[\\ \\ n(\ell) \;=\; P \\ \\ u(0) \;=\; 0\,. \end{array} \right. \tag{1.35}$$

Les conditions d'optimalité à l'aide du lagrangien sont formellement identiques à (1.10) avec ici :

$$L(\,A,\,\lambda_1\,) \;=\; J_0(\,u_A\,) \;+\; \lambda_1\,(\,j_1(A) \,-\, v\,) \tag{1.36}$$

on obtient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial A}(A,\lambda)\;\delta A \;=\; 0 \quad \textit{pour tout}\ \delta A \\ \\ j_1(A) \;-\; v \;=\; 0 \end{array} \right. \tag{1.37}$$

avec ici

$$\frac{\partial L}{\partial A}(A,\lambda)\,\delta A \;=\; \frac{\partial u_A(\ell)}{\partial A}\,\delta A(\ell) \;+\; \lambda_1 \int_0^\ell \delta A\,dx \tag{1.38}$$

Le terme $\frac{\partial u_A(\ell)}{\partial A}\,\delta A(\ell)$ n'est connu qu'implicitement à travers l'équation (1.32). Suivons la même démarche que dans l'exemple précédent.

Pour expliciter, nous dérivons encore par rapport à A l'équation d'équilibre (1.32) :

$$\int_0^\ell E\,A\left(\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A\right)'\,v'\,dx + \int_0^\ell E\,\delta A\,u'\,v'\,dx \;=\; \int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;v\;dx \tag{1.39}$$

d'autre part $v \;=\; \dfrac{\partial u}{\partial A}\,\delta A$ dans l'equation (1.32) donne :

$$\frac{\partial u}{\partial A}(\ell)\,\delta A(\ell) \;=\; \frac{1}{P}\int_0^\ell n\left(\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A\right)' \;-\frac{1}{P}\int_0^\ell \rho\,g\;A\,\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A \tag{1.40}$$

par ailleurs $v = u$ dans (1.39) donne

$$\int_0^\ell E\,A\,u' \left(\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A\right)' dx \;=\; \int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;u\;dx \;-\; \int_0^\ell E\,\delta A\,(u')^2\;dx, \tag{1.41}$$

et comme $n = EAu'$ on tire de (1.40) et (1.41) :

$$\frac{\partial u}{\partial A}(\ell)\,\delta A(\ell) \;=\; \frac{1}{P}\int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;u\;dx \;-\; \frac{1}{P}\int_0^\ell E\,\delta A\,(u')^2\;dx \;-\; \frac{1}{P}\int_0^\ell \rho\,g\;A\,\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A. \tag{1.42}$$

A la différence de l'exemple précédent, le second membre n'est pas explicite par rapport à δA ($\dfrac{\partial u}{\partial A}$ n'est connu qu'à travers l'équation (1.39)).
Une façon de progresser est d'introduire un <u>état adjoint</u> solution de l'équation :

$$\left|\begin{array}{l} \textit{pour tout } w \textit{ nul en } x = 0\,,\ \textit{trouver } p \textit{ nul en } x = 0 \\[2em] \textit{telque}\ \ \int_0^\ell E\,A\,w'\,p' \;=\; -\,w(\ell). \end{array}\right. \tag{1.43}$$

(noter que le second membre est l'opposé de la dérivée de $J_0(u_A)$: $\dfrac{\partial J_0}{\partial u} w = w(\ell)$). On constate alors que si l'on fait le choix $w = \dfrac{\partial u}{\partial A}\delta A$, dans (1.43)

$$\frac{\partial u}{\partial A}(\ell)\,\delta A(\ell) \;=\; -\int_0^\ell E\,A\left(\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A\right)' p'\,dx \tag{1.44}$$

faisons donc $v = p$ dans l'équation d'équilibre dérivée :

$$-\int_0^\ell E\,A\left(\frac{\partial u}{\partial A}\,\delta A\right)' p'\,dx \;=\; \int_0^\ell E\,\delta A\,u'\,p' - \int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;p\;dx \tag{1.45}$$

si bien que

$$\frac{\partial u}{\partial A}(\ell)\,\delta A(\ell) \;=\; \int_0^\ell E\,\delta A\,u'\,p' - \int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;p\;dx \tag{1.46}$$

Remarque :

Notons que le premier terme est la dérivée du membre de gauche de (1.32) tandis que le deuxième terme est la dérivée par rapport à A du membre de droite ; nous verrons que ce résultat est très général.

La condition d'optimalité (1.38) peut donc se préciser ainsi : pour tout δA

$$\int_0^\ell E\,\delta A\,u'\,p' - \int_0^\ell \rho\,g\;\delta A\;p\;dx \;+\; \lambda_1\int_0^\ell \delta A\,dx \;=\; 0, \tag{1.47}$$

la forme locale de la condition d'optimalité devient ici :

$$E\,u'\,p' \;-\; \rho\,g\,p \;+\; \lambda_1 \;\;=\;\; 0 \tag{1.48}$$

avec u solution de (1.32) et p solution de (1.44) la situation est donc plus compliquée que dans l'exemple précédent puisque la condition d'optimalité (c.o pour simplifier) fait intervenir l'état u et le multiplicateur λ_1 mais aussi une fonction p solution d'un autre problème aux limites.

Du point de vue numérique il conviendrait de résoudre (1.32) et (1.43) et (1.47) pour une suite convenable de A : par exemple l'algorithme du gradient réduit ou mieu l'algorithme de programmation quadratique séquentielle appliqués à une approximation par éléments finis de (1.32), (1.43) ; pour une solution explicite il convient de résoudre (1.35), (1.43) et (1.48).

<u>Résolution de (1.35)</u> :

$-n' \;=\; g\,\rho\,A$ fournit $n(x) \;-\; n(\ell) \;=\; \displaystyle\int_x^\ell \rho\,g\,A(s)\,ds$

$$n(x) \;=\; P \;+\; \rho\,g \int_x^\ell A(s)\,ds$$

d'autre part $n \;=\; E\,A\,u'$ fournit $u(x) \;=\; \displaystyle\int_0^x \frac{n}{E\,A}\,dt.$

<u>Résolution de (1.43)</u> :

équations locales :

$$\begin{cases} -\,(E\;A\,p')' \;\;=\;\; 0 \\ E\;A\,p'(\ell) \;\;=\;\; -1 \\ p(0) \;\;=\;\; 0 \end{cases} \tag{1.49}$$

d'où $E\;A\,p' \;=\; cste$ et donc $E\;A\,p' \;=\; -1$ et $p(x) = -\dfrac{1}{E}\displaystyle\int_0^x \frac{ds}{A(s)}$

la condition d'optimalité (1.48) peut donc se préciser avec :

$$u' \;=\; \frac{n}{E\,A} \qquad A \;=\; -\frac{n'}{\rho\,g} \qquad p' \;=\; -\frac{1}{E\,A} \qquad p \;=\; -\frac{1}{E}\int_0^x \frac{ds}{A} \tag{1.50}$$

on peut donc tout exprimer à l'aide de la seule inconnue n :

$$u' \;=\; \frac{n}{E}\,\frac{\rho\,g}{n'} \qquad p' \;=\; \frac{\rho\,g}{E\,n'} \qquad p \;=\; \frac{\rho\,g}{E}\int_0^x \frac{ds}{-n'}$$

d'où (1.48) fournit :

$$n \, \frac{\rho^2 \, g^2}{E \, n'^2} \; - \; \frac{\rho^2 \, g^2}{E} \int_0^x \frac{ds}{n'} \; + \; \lambda_1 \; = \; 0.$$

C'est une équation intégro- différentielle. En dérivant par rapport à x :

$$-\frac{n'}{n'^2} \; + \; \frac{2 \, n \, n"}{n'^3} \; - \; \frac{1}{n'} \; = \; 0 \quad \text{ou bien} \quad \frac{n \, n"}{n'^2} \; = \; 1$$

et miracle, $\dfrac{n"}{n'} = \dfrac{n'}{n}$ i.e. $Log \, n' \; = \; Log \, n \; + \; Cte$ ou bien $n' \; = \; c \, n$ à résoudre avec $n(L) \; = \; P$, soit $n(x) \; = \; P \, e^{c\,(x-L)}$ et $n' = P \, c \, e^{c\,(x-L)}$.

{Dessin de la fct n avec Maple}

on peut préciser c avec le volume V ; utilisons (1.50) :

$A \; = \; \dfrac{-P \, c}{\rho \, g} \, e^{c\,(x-L)}$ d'où en intégrant $\dfrac{-P}{\rho \, g} \; e^{c\,(x-L)} \, \Big|_0^L = V$

c'est à dire $e^{-cL} = 1 + \dfrac{\rho V g}{P}$, $-cL = Log\left(1 + \dfrac{\rho V g}{P}\right)$

ou bien

$$c = -\frac{1}{L} Log\left(1 + \frac{\rho V g}{P}\right)$$

qui est négatif quand $P > 0$, (1.50) fournit encore u' :

$$u' = \frac{n}{E \, A} \; = \; \frac{P \, e^{c\,(x-L)} \, \rho \, g}{-E \, P \, c \, e^{c\,(x-L)}} \; = \; -\frac{\rho \, g}{E \, c}$$

enfin $u(L) \; = \; -\dfrac{\rho \, g \, L}{E \, c}$.

1.4 Poutre en appui simple (en préparation)

Chapitre 2

Un modèle de poutre peu profonde

2.1 Poutre courbe en élasticité linéaire

Nous rappelons quelques résultats théoriques (voir par exemple Ciarlet (1978)chap. 8 [**?**]) ; dans cette présentation, la ligne moyenne est supposée parametrée par son abscisse curviligne : $s \longmapsto \varphi(s)$, son vecteur tangent $\varphi'(s)$ est donc unitaire. Dans ces conditions un modèle en élasticité linéaire pour une poutre courbe plane ou arc (ou arche) se déformant dans son plan consiste à minimiser l'énergie potentielle totale de la forme :

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left\{ EA\left(v_1' - \frac{v_2}{R}\right)^2 + EI\left(v_2' - \frac{v_1}{R}\right)'^2 \right\} ds + \int_0^\ell f v ds \tag{2.1}$$

avec les notations suivantes : le vecteur déplacement de la ligne moyenne $\vec{v} = v_1\vec{a}_1 + v_2\vec{a}_2$ avec $\vec{a}_1 = \vec{\varphi}'(s)$ et $\vec{a}_2$ vecteur unitaire orthogonal à $\vec{a}_1$ (telque le repère $(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ soit direct).

· E module de Young

· A aire de la section droite

· I mouvement d'inertie de la section droite par rapport à un axe perpendiculaire au plan de la courbe.

· $f = f_1\, a_1 + f_2\, a_2$ densité linéique des forces appliquées.

· $\dfrac{1}{R} = \dfrac{d\theta}{ds}$ courbure de la courbe (R, rayon de courbure), avec θ angle de $\vec{e}_1$ et de $\varphi'(s)$.

Dans le chapitre 5 nous indiquerons comment ce modèle est l'approximation linéaire d'un modèle en grands déplacements.

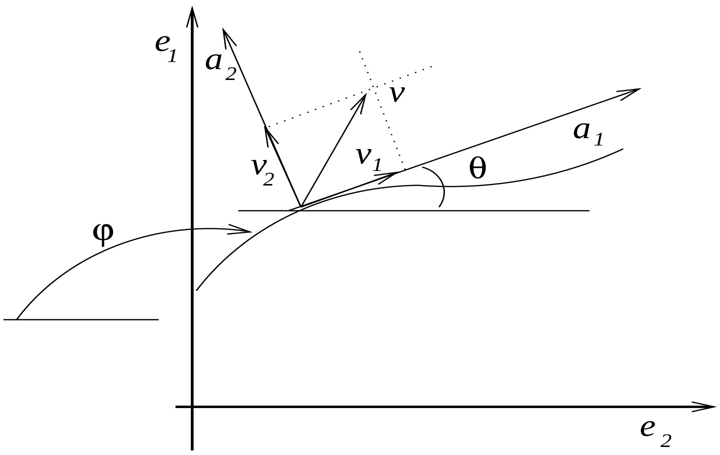

FIG. 2.1 – Poutre courbe en élasticité linéaire

ThéorÃ¨me 2.1 *Si* $\dfrac{1}{R}$ *est continûment dérivable dans* $[0,\ell]$*, alors la forme bilinéaire*

$$a(u,v)=\int_0^\ell \left\{EA\left(u_1'-\frac{u_2}{R}\right)\left(v_1'-\frac{v_2}{R}\right)+EI\left(u_2'-\frac{u_1}{R}\right)'\left(v_2'-\frac{v_1}{R}\right)'\right\}ds \tag{2.2}$$

est coercitive sur $V = H_0^1(0,\ell)\times\left(H^2(0,\ell)\cap H_0^1(0,\ell)\right)$.

Corollaire 1 *Existence et unicité de la solution de*

$$\forall\ v\in\ V \qquad a(u,v)\ =\ \int_0^\ell f\ v\ \ ds \tag{2.3}$$

Cette solution réalise le minimum de l'énergie potentielle totale (2.1).

Ce corollaire se déduit du théorème à l'aide du théorème de Lax- Milgram (Dautray- Lions 1984 [**?**], Céa 1981 [**?**]).
Nous renvoyons à Ciarlet (1978) [**?**] ch. 8 pour la démonstration du théorème 2.1 ; nous en proposons une démonstration plus simple dans le cas d'une arche peu profonde : $\dfrac{1}{R}$ petit et $\dfrac{u_1}{R}$ négligeable devant u_2 ; c'est ce cas qui sera utilisé au §2.2.4.

Démonstration du théorème 2.1

$$a(u,v)=\int_0^\ell \left\{EA\left({u'}_1-\frac{u_2}{R}\right)\left({v'}_1-\frac{v_2}{R}\right)+\int_0^\ell EI{u''}_2{v''}_2\right\}ds \tag{2.4}$$

∗ Dans une première étape, nous montrons que $a(v,v)=0$ entraîne $v=0$; l'interprétation mécanique est très importante : les mouvements v qui annulent l'énergie de déformation

se réduisent au déplacement nul.
En effet $a(v,v)=0$ entraîne :

$$v_1' - \frac{v_2}{R} = 0 \tag{2.5}$$

$$v_2'' = 0 \tag{2.6}$$

(2.6) fournit $v_2 = \alpha\, s + \beta$, et (2.5) $v_1 = \dfrac{\alpha\, s+\beta}{R}$.

Considérons quelques conditions aux limites classiques :
<u>Appui simple en $x=0$ et $x=\ell$</u>

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 = v_1(\ell) \\ v_2(0) = 0 = v_2(\ell) \\ v"_2(0) = 0 = v"_2(\ell) \end{cases}$$

on a immediatement $v_1 \equiv 0 \equiv v_2$
<u>Appui simple en $x=0$</u>

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_2''(0) = 0, \end{cases}$$

fournit $\beta = 0$ mais aucune condition sur α. Condition <u>insuffisante</u>.
<u>Encastrement en $x=0$</u>

$$\begin{cases} v_1(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \\ v_2'(0) = 0 \end{cases}$$

donne immédiatement $v_1 \equiv 0 \equiv v_2$.
Remarque : en fait l'existence et l'unicité sont assurées lorsque les conditions aux limites assurent l'abscence de mouvement de corps rigide.
Remarquons qu' à la différence de l'arche profonde on ne peut en déduire que v est un mouvement de corps rigide dès que l'énergie de déformation est nulle sans tenir compte des conditions aux limites ; ceci est toutefois réalisé compte tenu des approximations du modèle de poutre peu profonde : $\dfrac{v_1}{R}$ négligé devant v_2' , y'^2 négligé devant $v'=1$ et donc $\dfrac{1}{R} \sim y''$ on a donc $a_1 \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$ $a_2 \simeq \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{v} = v_1\, a_1 \;+\; v_2\, a_2 \;=\; \begin{pmatrix} v_1 - v_2\, y' \\ v_1\, y' + \; v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {v_1}' - v_2' \, y' - v_2 \, y'' \\ v_1' \, y' + v_1 y'' + {v_2}' \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -v_2 y' \\ {v_2}' \end{pmatrix} = v_2 a_2$$

d'où $\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{b}$ normal ce qui conserve la longueur , au premier ordre compte tenu de l'hypothèse (poutre peu profonde) : $1 + {y'}^2 \simeq 1$ et naturellement la courbure petite.

$*$ **Minoration de** $a(v,v)$ (deuxième étape)

$$\text{le terme } \int_0^\ell EI v_2'' dx = EI|v_2|_2^2 \text{ est banal}\,; \tag{2.7}$$

le terme

$$\int_0^\ell EA \left(v'_1 - \frac{v_2}{R}\right)^2 \geq \int_0^\ell EA \left({v_1}'^2 - 2{v_1}' \frac{v_2}{R}\right) \geq E\,A \left[|v_1|_1^2 - 2 \; sup|\frac{1}{R}| \; |v_1|_1 \; |v_2|_0\right]$$

(utiliser $-2\,a\,b \;\geq\; -a^2\varepsilon \;-\; \dfrac{b^2}{\varepsilon}$) ; et il est facile de vérifier que l'on en déduit pour tout $\eta > 0$

$$\int_0^\ell EA \left(v'_1 - \frac{v_2}{R}\right)^2 \geq E\,A \left[\left(1 - \eta \; sup|\frac{1}{R}|\right) |v_1|_1^2 - \frac{1}{\eta} \; sup|\frac{1}{R}| \; |v_2|_0^2\right] \tag{2.8}$$

Comme $|v_2|_2$ est équivalente à la norme dans $H^2(0,\ell)$ la difficulté pour montrer la coercitivité provient du signe moins devant $|v_2|_0^2$.

$*$ **Coercitivité de** $a(v,v)$ (troisième étape)

Il reste a montrer qu'il existe $c > 0$ telque $a(v,v) \geq c\left(|v_1|_1^2 + |v_2|_2^2\right)$.
Nous raisonons par la contraposée : nous supposons qu'il n'existe pas de $c > 0$ telque l'inégalité ci-dessus soit vérifiée ; on peut donc trouver une suite $v^k \in V$ telle que $|v_1^k|_1^2 + |v_2^k|_2^2 = 1$ et $a(v^k, v^k) \longrightarrow 0$; comme V est un espace de Hilbert, on peut extraire une sous- suite faiblement convergente (cf. par exemple Luenberger [?], Brezis [?]) ; $v^{k'} \rightharpoonup v$ dans V faible ; d'autre part une forme quadratique positive continue sur V est aussi faiblement semi- continue inférieurement et donc

$$a(v,v) \leq \liminf_{k \to +\infty} a(v^k, v^k)$$

par hypothèse cette limite inférieure est une limite égale à zéro et la première étape entraîne $v = 0$.

Utilisons maintenant la deuxième étape ; comme $a(v^k, v^k) \longrightarrow 0$ on déduit avec (2.7) que

$|v_2^k|_2^2 \longrightarrow 0$ par suite $|v_2^k|_0^2 \longrightarrow 0$; et comme $|v_1^k|_1^2 + |v_2^k|_2^2 = 1$ on a $|v_1^k|_1^2 \longrightarrow 1$.
Puisque $\displaystyle\int_0^\ell E\,A \left(v_1^{k'} - \frac{v_2^k}{R} \right)^2 \to 0$ ceci entraîne donc que (2.8) est fausse et achève la démonstration de l'ellipticité de a sur V, c'est à dire sa coercitivité.

Equations locales.
Utilisons l'effort normal

$$n = EA\left(u_1' - \frac{u_2}{R}\right) \tag{2.9}$$

et le moment flexion

$$m = EI\left(u_2' + \frac{u_1}{R}\right). \tag{2.10}$$

En intégrant par parties

$$a(u,v) \;=\; \int_0^\ell \left\{ n\left(v_1' - \frac{v_2}{R}\right) + m\left(v_2' - \frac{v_1}{R}\right)' \right\} ds$$

il vient :

$$-\int_0^\ell n'v_1 + nv_1\Big|_0^\ell - \int_0^\ell n\frac{v_2}{R} - \int_0^\ell m'\frac{v_1}{R} + \int_0^\ell m''v_2 + m\left(v_2' - \frac{v_1}{R}\right)\Big|_0^\ell - m'v_2\Big|_0^\ell = \int_0^\ell f_1v_1 + f_2v_2$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} -n' - \dfrac{m'}{R} = f_1 \\ \\ -\dfrac{n}{R} + m'' = f_2 \end{array}\right. \tag{2.11}$$

et les conditions aux limites suivant les choix de l'espace V :

• si appui simple $\left\{\begin{array}{l} u_1(0) = 0 \\ v_1(0) = 0 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} u_2(0) = 0 \\ v_2(0) = 0 \end{array}\right.$ on a aussi $m(0) = 0$:
• si encastré $\left\{\begin{array}{l} u_2'(0) = 0 \\ v_2'(0) = 0 \end{array}\right.$ en revanche $m(0)$ une réaction inconnue
• si en revanche en ℓ on n'a aucune condition sur $u_1(\ell)$, $v_1(\ell)$, $u_2(\ell)$, $v_2(\ell)$, $u_2'(\ell)$ et $v_2'(\ell)$, on obtient

$$n(\ell) = 0 \qquad m(\ell) = 0 \qquad m'(\ell) = 0$$

mais on pourrait aussi considérer le cas de forces concentrées aux extrémités en rajoutant $F_1v_1(\ell) + F_2v_2(\ell)$ au travail des forces extérieures : dans ce cas on aurait $n(\ell) = F_1$, $-m'(\ell) = F_2$; on pourrait également considérer un moment concentré en une extrémité, dans ce cas $m(\ell) = M$.
Les équations (2.11) sont à prendre en un sens faible si $u_1 \in H^1$ et $u_2 \in H^2$; toutefois nous pouvons préciser les hypothèses qui assurent l'existence d'une solution forte (ou classique).

Régularité des solutions.

Voyons maintenant si la solution de (2.6) est plus régulière qu'être dans l'espace $V = H_0^1(0,\ell) \times \left(H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell\right)$ Cette question est délicate pour les équations aux dérivées partielles ; dans ce cas à une variable la situation est élémentaire.

Comme $m \in H^2(0,\ell)$, $m' \in H^1(0,\ell)$ la première équation locale fournie alors

$$n' = -\frac{m'}{R} - f_1 \quad \in L^2(0,\ell) \quad \text{d'où } n \in H^1(0,\ell),$$

la deuxième équation locale nous fournit alors

$$m'' = f_2 + \frac{n}{R} \quad \in L^2(0,\ell) \quad \text{d'où } m \in H^2(0,\ell).$$

On a donc avec (2.9), $u_1' - \dfrac{u_2}{R} \in H^1(0,\ell)$ et avec (2.10) $\left(u_2' + \dfrac{u_1}{R}\right) \in H^3(0,\ell)$ d'où $u_1 \in H^2(0,\ell)$; mais comme $u_1 \in H^2$, $u_2' + \dfrac{u_1}{R} \in H^3(0,\ell)$ fournit seulement que $u_2' \in H^2$ et donc $u_2 \in H^3$ et non H^4 comme dans le cas d'une poutre rectiligne où $\dfrac{1}{R} = 0$.

Dans ces conditions nous supposons que $f_1 \in H^1(0,\ell)$. Alors

$$n' = -\frac{m'}{R} - f_1 \quad \text{donne } n \in H^2(0,\ell)$$

$$\text{et } u_1' - \frac{u_2}{R} = \frac{n}{EA} \quad \text{donne } u_1 \in H^3(0,\ell)$$

et comme $u_1 \in H^3(0,\ell)$, $\left(u_2' + \dfrac{u_1}{R}\right)' = \dfrac{m}{EI}$ donne $u_2' \in H^3$ ie. $u_2 \in H^4$.

Proposition 2.1 *pour $f_1 \in H^1(0,\ell)$, $f_2 \in L^2(0,\ell)$ la solution de (2.8) satisfait $u_1 \in H^3(0,\ell)$ et $u_2 \in H^4(0,\ell)$ et $n \in H^2(0,\ell)$ $m \in H^2(0,\ell)$ et l'opérateur A associé à la forme bilinéaire (2.2) $A : H^3 \times H^4 \longrightarrow H^1 \times L^2$ est bijectif, continu.*

Pour la continuité de A, la vérification est facile en prenant une suite $u_1^n \longrightarrow 0$ dans $H^3(0,\ell)$ et $u_2^n \longrightarrow 0$ dans $H^4(0,\ell)$; l'injectivité provient du corollaire 1.

Corollaire 2 *A est bijectif et bicontinu.*

Cela résulte d'un théorème abstrait de Banach ; Corollaire II. 6, Brezis [?] 1983. La proposition 2.1 assure que ce théorème s'applique.

2.2 Un modèle non linéaire

2.2.1 Introduction

Hypothèses mécaniques : déformation dans un plan, faible courbure initiale déplacements tangents "très petits ", déplacement normal "petit", matériaux élastique linéaire. Dans ce modèle, Budiansky [?] , 1974, la poutre initiale est faiblement courbée, on peut donc confondre le repère local et le repère global ; on suppose que la ligne moyenne est un graphe, le déplacement tangent v et le déplacement normal w peuvent être pris comme fonction de l'abscisse x

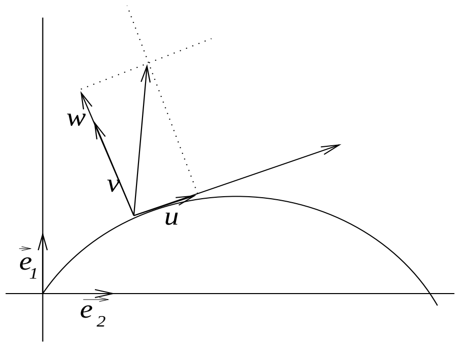

FIG. 2.2 – poutre faiblement courbée

Nous verrons au chapitre 5 que l'on peut considérer que l'allongement relatif peut être donné par :

$$\varepsilon \;=\; u' \;-\; \frac{w}{R_0} \;+\; \frac{1}{2}\,w'^2 \tag{2.12}$$

R_0 étant la courbure initiale, et le changement de courbure est pris linéarisé

$$\chi \;=\; -\,w''. \tag{2.13}$$

u est le déplacement tangent, w est le déplacement normal.
Notons $\underline{\varepsilon} = u' + \dfrac{w}{R_0}$ allongement relatif linéaire,

$$\varepsilon = \underline{\varepsilon} + \frac{1}{2} w'^2 \tag{2.14}$$

Sous l'hypothèse d'un matériaux suivant une loi de type Saint- Venant (élasticité linéaire), l'effort normal est donnée par $n = EA\varepsilon$ (notons $\underline{n} = EA\underline{\varepsilon}$, $n = \underline{n} + EA\dfrac{w'^2}{2}$) et le moment de flexion par $m = E\,I\,\chi$ avec A aire de la section droite et I moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal au plan de déformation. Nous supposons que le travail des forces extérieures est de la forme

$$\ell(u,w) = \int_0^L (fu + gw)dx \ + \ Fu(\ell) + Gw(\ell) \tag{2.15}$$

l'énergie potentielle totale du système est donnée par

$$\Pi(u,w) = \frac{1}{2}\int_0^L (n\varepsilon + m\chi)dx \ - \ \ell(u,w) \tag{2.16}$$

<u>L'équation d'équilibre</u> correspond au minimum de l'énergie potentielle totale :
Pour tout δu, δw cinétiquement admissibles :

$$< \ \mathcal{G}(u,w) \ \ , \ \ (\delta u \, , \delta w) \ > \ = \ 0 \tag{2.17}$$

avec

$$< \ \mathcal{G}(u,w) \ \ , \ \ (\delta u \, , \delta w) \ > = \ \frac{\partial \Pi}{\partial v}\,\delta u \ + \ \frac{\partial \Pi}{\partial w}\delta w$$

où

$$< \mathcal{G}(u,w) \ \ , \ \ (\delta u \, , \delta w) \ > = \ \int_0^L (n\,\delta\varepsilon + m\,\delta\chi) \ - \ \ell(\delta v \, , \, \delta w) \tag{2.18}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \delta\varepsilon & = & \delta u' + \dfrac{\delta w'}{R_0} + w'\delta w' = \underline{\delta\varepsilon} + w'\delta w' \ = \underline{\varepsilon}\,(\delta u, \delta w) \ + \ w'\delta w' \\ & & \\ \delta\chi & = & -\,\delta w\text{''} \ \ = \ \ \chi(\delta w) \end{array} \right. \tag{2.19}$$

à noter $\delta(n\varepsilon) = \delta n\varepsilon + n\delta\varepsilon$ mais comme la loi de comportement est linéaire : $\delta n\varepsilon = n\delta\varepsilon$ ie. $\delta(n\varepsilon) = 2n\delta\varepsilon$
on peut décomposer $u\,\delta\varepsilon$ avec sa partie linéaire :

$$n\delta\varepsilon = \left(\underline{n} + EA\frac{w'^2}{2}\right)\left(\underline{\delta\varepsilon} + w'\delta w'\right)$$

$$= \underline{n\delta\varepsilon} + \underline{\delta n}\frac{w'^2}{2} + \underline{n}w'\delta w' + EA\frac{w'^3}{2}\delta w$$

ces formules seront commodes pour expliciter la méthode incrémentale.

2.2.2 Méthode incrémentale

Il s'agit d'une méthode très générale d'attaque de problèmes statiques non- linéaires : elle est très utilisée numériquement en liaison avec une approximation par éléments finis mais elle a aussi une utilisation théorique puisqu'elle peut fournir un résultat d'existence de solution comme nous allons le voir ; elle s'étend au cas de systèmes en présence de points d'instabilité (P. Aubert [?] 1996, Allgower et Georg [?] 1993, Crisfield [?] 1981).

L'idée est très naturelle : elle consiste à imaginer que avant d'arriver à un état d'équilibre sous une charge $\mathcal{F}$, la structure passe par des états d'équilibre sous des charges plus petites $\lambda\mathcal{F}$ où $\lambda \in [0, 1]$, ceci en négligeant les forces d'inerties.
Ecrivons alors l'équation d'équilibre en introduisant λ :

$$< \; G(u, w; \lambda) \, , (\delta u \; \delta w) \; > \;\; = \;\; 0. \tag{2.20}$$

Pour simplifier les notations posons $U = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$, et $\delta U = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta w \end{pmatrix}$, i.e :

$$< \; G(U; \lambda) \, , \delta U \; > \;\; = \;\; 0. \tag{2.21}$$

L'équation incrémentale n'est autre que la dérivée de l'équation précédente par rapport à λ :

$$< \; \frac{\partial G}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \; + \; \frac{\partial G}{\partial \lambda} \, , \; \delta U \; > \;\; = \;\; 0. \tag{2.22}$$

<u>Justification théorique</u> :
Dans (1.13) on a une équation linéaire pour l'inconue $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}$; l'existence et l'unicité de $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}$ peut se justifier classiquement quand $\dfrac{\partial G}{\partial U}$ est inversible (d'inverse borné dans les espaces de Banach) à l'aide d'un théorème des fonctions implicites ; dans ce cas il suffit d'utiliser que la solution de (2.22) est bien la dérivée de la fonction <u>implicite</u> $\lambda \longrightarrow U(\lambda)$ définie par (2.21).
<u>Utilisation numérique</u> : on discrétise par rapport à λ le système différentiel (2.22) obtenu après discrétisation des variables d'espace (par exemple par éléments finis) ; pour une bonne précision il convient de discrétiser l'équation différentielle par prédiction-correction.

2.2.3 Méthode incrémentale pour une poutre courbe peu profonde

Déterminons $\dfrac{\partial G}{\partial U}\dfrac{\partial U}{\partial \lambda}$ pour l'exemple précédent. Pour cela dérivons (2.18) avec $U = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ $\delta U = \begin{pmatrix} \delta u \\ \delta w \end{pmatrix}$

$$< \frac{\partial G}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \delta U > = \int_0^L \Delta n\, \delta\varepsilon \;+\; n\, \Delta\delta\varepsilon \;+\; \Delta m\, \delta\chi \;+\; m\; \Delta\delta\chi$$

avec

$$\Delta n \;=\; \frac{\partial n}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} \;=\; \frac{\partial \underline{n}}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} + E\,A\,w'\,\frac{\partial w'}{\partial \lambda} \qquad \text{où}$$

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} \;=\; E\,A\left(\frac{\partial u'}{\partial \lambda} - \frac{1}{R_0}\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right) \;=\; E\,A\underline{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)$$

$$\Delta\,\delta\varepsilon \;=\; \frac{\partial\,\delta\varepsilon}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial \delta\,\underline{\varepsilon}}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial w'}{\partial \lambda}\delta w' = \frac{\partial w'}{\partial \lambda}\delta w'$$

$$\Delta\,m \;=\; \frac{\partial m}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = EI\frac{\partial \chi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -EI\frac{\partial w''}{\partial \lambda} = +EI\chi\left(\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)$$

$$\Delta\,\delta\chi \;=\; \frac{\partial \delta\chi}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$$

ce qui donne pour l'équation incrémentable

$$< \frac{\partial G}{\partial U}\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \delta U >= \int_0^L \left(EA\,\underline{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right) + EAw'\frac{\partial w'}{\partial \lambda}\right)\left(\underline{\varepsilon}(\delta U) + w'\delta w'\right)$$

$$+\int_0^L \left(\underline{n}(U) + EA\frac{w'^2}{2}\right)\left(\frac{\partial w'}{\partial \lambda}\delta w'\right) + \int_0^L EI\chi\left(\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)\chi(\delta w)$$

et dans le cas où $U = 0$ on obtient comme $\underline{\varepsilon} = 0$,

$$< \frac{\partial G}{\partial U}(0)\frac{\partial U}{\partial \lambda}, \delta U >= \int_0^L EA\,\underline{\varepsilon}\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)\underline{\varepsilon}(\delta U) + \int_0^L EI\chi\left(\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)\chi(\delta w)$$

ce qui n'est autre que la forme bilinéaire de la poutre courbe peu profonde en élasticité linéaire. Le terme

$$< \frac{\partial G}{\partial \lambda}, \delta U >= \int_0^L (f\;\delta u + g\;\delta w) + F\;\;\delta u(\ell) + G\;\;\delta w(\ell)$$

est le second membre habituel.

Proposition 2.2 *L'équation incrémentale (2.22) pour la poutre peu profonde calculée en* $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est l'équation de la poutre peu profonde en élasticité linéaire pour l'inconnue* $\dfrac{\partial U}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \lambda} \end{pmatrix}$ *; la solution de (2.17) existe avec une petite charge, et est différentiable par rapport à* λ *pour* λ *proche de zéro.*

Démonstration

Comme l'opérateur associé $A : H^3(0,\ell)\times H^4(0,\ell) \longrightarrow H^1(0,\ell)\times L^2(0,\ell)$ est bijectif, bicontinu (proposition 2.1) le théorème des fonctions implicites assure que $\lambda \longmapsto (u(\lambda), w(\lambda))$ existe et est différentiable pour λ proche de zéro. D'où l'existence d'une solution de (2.17) avec une petite charge.

2.2.4 Existence d'un minimum de l'énergie potentielle totale

Voici d'abord une minoration de l'énergie de déformation du système :

Proposition 2.3 *L'énergie de déformation du système* $W(u,w) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell (EA\,\varepsilon^2(u,w) + EI\chi^2(w))dx$ *est minorée*

$$\int_0^\ell EA\,\varepsilon^2 \geq (1-\frac{\alpha}{2})EA\left\{\left(1-\eta\ sup|\frac{1}{R_0}|\right)|u|^2_{H^1} - \frac{1}{\eta}\ sup|\frac{1}{R_0}|\,|w|^2_{L^2}\right\} + EA\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\alpha}\right)|w'|^4_{L^4} \tag{2.23}$$

$$\int_0^\ell E\,I\,\chi^2 \quad \geq \quad E\,I\,|w''|^2_{L^2} \tag{2.24}$$

<u>**Démonstration :**</u> Ecrivons $\varepsilon = \underline{\varepsilon} + \dfrac{1}{2}w'^2$, on a donc $\varepsilon^2 = \underline{\varepsilon}^2 - |\underline{\varepsilon}|w'^2 + \dfrac{w'^4}{4}$ or pour tout $\alpha > 0$, $|\underline{\varepsilon}|\ w'^2 \geq \dfrac{1}{2}\left(-\underline{\varepsilon}^2\alpha - \dfrac{w'^4}{\alpha}\right)$ on a donc :

$$\int_0^\ell EA\varepsilon^2(u,w)dx \geq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\int_0^\ell E\ A\ \left[\underline{\varepsilon}^2 + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2\alpha}\right)w'^4\right]$$

avec $\underline{\varepsilon} = u' - \dfrac{w}{R_0}$ donc en utilisant la minoration obtenue dans le cas de l'élasticité linéaire : pour tout $\eta > 0$

$$(1-\frac{\alpha}{2})\int_0^\ell EA\varepsilon^2 \geq \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)EA\left[\left(1-\eta\ sup|\frac{1}{R_0}|\right)|u|^2_{H^1} - \frac{1}{\eta}sup|\frac{1}{R_0}|\ |w|^2_{L^2}\right]$$

■

Annulation de l'énergie de déformation.

$W(u,w)=0$ entraine

$$\begin{cases} u' - \dfrac{w}{R_0} + \dfrac{w'^2}{2} = 0 \\ \\ w'' = 0. \end{cases}$$

Considérons quelques conditions aux limites classiques

Appui simple en $x=0$ et $x=\ell$ (ou même appui simple un patin à une extrémité)

$u(0)=0$, $u(\ell)=0$ (ou $u(\ell)$ libre, ce qui correspond à la présence d'un patin en $x=\ell$)

$w(0)=0=w(\ell)$

$m(0)=EIw''(0)=0=EIw''(\ell)=m(\ell)$

$w(0)=0=w(\ell)$ ces dernières relations donnent avec $w''=0$, $w\equiv 0$ d'où $u'\equiv 0$ donc avec

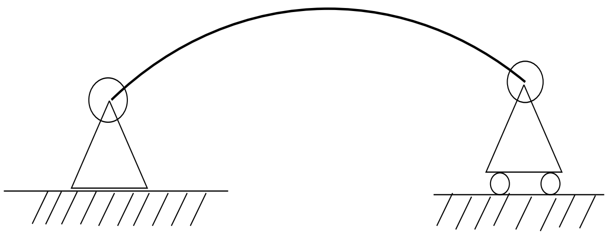

FIG. 2.3 – poutre en appui simple

la première équation $u\equiv 0$ avec $u(0)=0$ (la condition en $x=\ell$ est redondante)

Encastrement en $x=0$ $\begin{cases} u(0)=0 \\ w(0)=0 \\ w'(0)=0 \end{cases}$

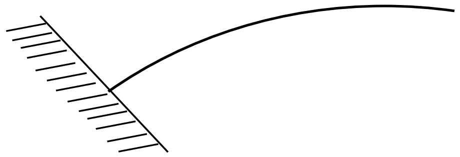

FIG. 2.4 – poutre encastr/'ee

Comme pour l'appui simple $w''=0$, $w(0)=0$ et $w'(0)=0$ fournissent $w\equiv 0$ d'où $u'\equiv 0$. Et donc comme $u(0)=0$ entraine $u\equiv 0$.

Comme dans le cas linéaire on vérifie qu'un appui simple en un seul point est insuffisant ;

on a donc :

Proposition 2.4 *Si $W(u,w)=0$ avec des conditions aux limites classiques (qui éliminent les mouvements de corps rigides), alors $u=0$ et $w=0$.*

(Interprétation : pas de déplacement à énergie de déformation nulle).
Remarque. Comme $H^1(0,\ell) \subset L^4(0,\ell)$, l'énergie est bien définie dans $H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)$.

ThéorÃ¨me 2.2 *L'énergie de déformation W est faiblement semi continue inférieurement dans $H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)$.*

En effet, montrons d'abord la faible continuité de ε et de χ ;
soit donc $v_n \rightharpoonup v$ dans $H^1(0,\ell)$ faible et
$w_n \rightharpoonup w$ dans $H^2(0,\ell)$ faible
on a donc $w"_n \rightharpoonup w"$ dans $L^2(0,\ell)$ faible
ou $\chi_n \rightharpoonup \chi$ dans $L^2(0,\ell)$ faible ;
d'autre part $\varepsilon = \underline{\varepsilon}_n + \dfrac{w_n'^2}{2}$ avec $\underline{\varepsilon}_n = u_n' - \dfrac{w_n}{R_0}$ donc $\underline{\varepsilon}_n \rightharpoonup \underline{\varepsilon} = u' - \dfrac{w}{R_0}$ dans $L^2(0,\ell)$ faible.
Reste à considérer la non linéarité $\dfrac{w_n'^2}{2}$; ceci vient de la propriété d'injection <u>compacte</u> (ref. Brézis [?] 1993) de $H^1(0,\ell) \longrightarrow \mathcal{C}^0(0,\ell)$ par suite comme $w_n' \rightharpoonup w'$ dans $H^1(0,\ell)$ faible, il converge <u>fortement</u> dans $\mathcal{C}^0(0,\ell)$ et donc dans $L^2(0,\ell)$ fort, mais comme $\underline{\varepsilon}_n \rightharpoonup \underline{\varepsilon}$ dans $L^2(0,\ell)$ faible on obtient seulement que $\varepsilon_n \rightharpoonup \varepsilon$ <u>faible</u> dans $L^2(0,\ell)$.
D'autre part l'énergie de déformation $W_{(\varepsilon,\chi)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\ell E\,A\,\varepsilon^2 \;+\; E\,I\,\chi^2$ est une forme quadratique sur $L^2(0,\ell)$, elle est définie positive, continue et donc faiblement continue inférieurement.
Il en résulte donc la faible semi continuité inférieure de $W(u,w)$ sur $H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)$.

Proposition 2.5 *Avec des conditions aux limites classiques (qui éliminent les mouvements de corps rigide), l'énergie de déformation $W(u,w)$ est minorée :*

$$W(u,w) \geq \gamma \left(|u|^2_{H^1} + |w''|^2_{L^2} + |w'|^4_{L^4} \right) \tag{2.25}$$

où $\gamma > 0$.

La démonstration se fait par la contraposée comme dans le cas quadratique ; supposons que l'inégalité (2.25) soit fausse, il existe donc une suite $u_k \in H^1(0,\ell)$ $w_k \in H^2(0,\ell)$ avec

$W(u_k, w_k) \longrightarrow 0$ et $|u_k|^2_{H^1} + |w''{}_k|^2_{L^2} + |w'_k|^4_{L^4} = 1$ comme dans le cas quadratique, on peut extraire une sous- suite faiblement convergente $u_{k'} \rightharpoonup u_0 \quad \text{dans} \quad H^1(0,\ell) \quad \text{faible}$
$w_{k'} \rightharpoonup w_0 \quad \text{dans} \quad H^2(0,\ell) \quad \text{faible}$
la faible semi-continuité inférieure de $W(u,w)$ montre que $W(u_0,w_0) = 0$ et donc $u_0 = 0 = w_0$ avec la proposition 2.4 .
Par hypothèse $\int_0^\ell EIw''{}_k \longrightarrow 0$ et donc $|w''|^2_{L^2} \longrightarrow 0$ et donc avec l'inégalité de poincaré (on utilise ici les conditions aux limites !) $|w_k|^2_{H^2} \longrightarrow 0$ d'où comme $H^1 \subset L^4$ $|w'|^4_{L^4} \longrightarrow 0$ et donc avec l'hypothèse $|u^k|^2_{H^1} \longrightarrow 1$; ceci entraîne que l'inégalité (2.23) proposition 2.3 est fausse.
On en déduit alors

Corollaire 3 *Sous les hypothèses de la proposition précèdente et f et $g \in L^2(0,\ell)$, $lim\, \Pi(u,w) = +\infty$ quand $\|u\|_{H^1} \longrightarrow +\infty$ et $\|w\|_{H^2} \longrightarrow +\infty$.*

Cela résulte facilement de la proposition précèdente et de l'expression

$$\Pi(u,w) = W(u,w) - \int_0^\ell (fu + gw) - Fu(\ell) - Gw(\ell)$$

Comme le travail des forces extérieures est linéaire (pour les forces ponctuelles, la continuité vient de l'injection continue de $H^1(0,\ell)$ dans $\mathcal{C}^0(0,\ell)$) continue, le comportement de $\Pi(u,w)$ pour u et w grand est donc celui de $W(u,w)$ qui est minoré dans la proposition précèdente par une quantité qui tend vers $+\infty$.

ThéorÃ¨me 2.3 *Avec les conditions aux limites classiques (qui éliminent les mouvements de corps rigide) et f et $g \in L^2(0,\ell)$, l'énergie potentielle totale $\Pi(u,w)$ admet au moins un minimum.*

En effet comme Π est faiblement s.c.i. (thm 2.2.) et le corollaire 3, le résultat se déduit d'un résultat classique d'optimisation (cf. par exemple Céa 1981 [**?**])

2.2.5 Equation d'équilibre local

Le principe des travaux virtuels (2.18) (ou principe variationnel) :
pour tout $u \in H^1$ pour tout $w \in H^2$ et satisfaisant les conditions aux limites cinématiques classiques :

$$\int_0^\ell n\left(\delta u' - \frac{\delta w}{R_0} + w'\delta w'\right) + m\,\delta w'' = \int_0^\ell (fu + gw) - Fu(\ell) - Gw(\ell)$$

il vient en intégrant par parties :

$$-\int_0^\ell n'\delta u + n\,\delta u\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \frac{n}{R_0}\delta w - \int_0^\ell (w'n)'\delta w + w'n\delta w\Big|_0^\ell + \int_0^\ell m"\delta w$$

$$+m\;\delta w'\Big|_0^\ell - m'\;\delta w\Big|_0^\ell = \int_0^\ell (f\,\delta u + g\delta w) + F\delta u(\ell) + G\delta w(\ell)$$

d'où

$$\begin{cases} -n' = f \qquad \text{dans} \quad]0,\ell[\\ \quad -\dfrac{n}{R_0} - (w'n)' + m'' = g \qquad \text{dans} \quad]0,\ell[\\ \\ n(\ell) = F \\ -m'(\ell) = G \end{cases}$$

$$\text{et} \begin{cases} u(0) = 0 \\ w(0) = 0 \quad \text{si encastré en zéro.} \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

2.2.6 Minimisation de l'énergie potentielle totale par rapport à la forme.

Pour e (épaisseur), et φ (la forme de la ligne moyenne) fixés on a vu qu'il existe une solution à la minimisation en (u,w) ; nous cherchons maintenant à concevoir une poutre de façon à minimiser l'énergie potentielle totale ; nous rajoutons ces deux variables (e,φ) dans l'énergie que nous cherchons à minimiser

$$\Pi(u\ ,w\ ,e\ ,\varphi)$$

par rapport à toutes les variables. Ce qui revient à minimiser par rapport aux variables de conception $e\ ,\varphi$

$$\Pi(u_{e,\varphi}\ ,w_{e,\varphi}\ ,e\ ,\varphi) \tag{2.26}$$

où $u_{e,\varphi}$, $w_{e,\varphi}$ sont solutions de l'équation pour les valeurs de e et φ.

Le problème de minimisation en (u,w) est bien posé pour $e \in L^\infty(0,\ell)$ et $\varphi \in W^{2,\infty}(0,\ell)$ toutefois pour la minimisation par rapport à (u,w,e,φ) des produits du type $\varphi''w'$ interviennent ; nous n'arriverons pas à passer à la limite dans un produit de fonctions qui convergent faiblement. Nous allons faire une hypothèse plus forte :

Hypothèse 1. : il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $c_3 > 0$ telles que $c_2 \leq \|e\|_{W^{1,\infty}} \leq c_1$ et $\|\varphi\|_{W^{3,\infty}} \leq c_3$

Hypothèse 2. : d'autre part $A = b.e$, $I = \dfrac{b\,e^3}{12}$ (section de forme rectangulaire pour fixer les idées), d'autres formes de section conviendraient.

ThéorÃ¨me 2.4 *Sous l'hypothèse précédente le minimum de* $\Pi(u\ ,w\ ,e\ ,\varphi)$ *par rapport à* $(u\ ,w\ ,e\ ,\varphi)$ *est atteint en au moins un point*
$(u_*, w_*, e_*, \varphi_*) \in H_0^1(0,\ell) \times H_0^2(0,\ell) \times W^{1,\infty}(0,\ell) \times W^{3,\infty}(0,\ell)$
(ou avec $(u_*, w_*) \in H^1(0,\ell) \times H^2(0,\ell)$ *avec des conditions aux limites qui éliminent les mouvements de corps rigide).*

Démonstration.

Soit $(u_k\ ,w_k\ ,e_k\ ,\varphi_k)$ une suite minimisante. Comme e_k et φ_k sont bornés et avec la minoration (2.25) (sous réserve d'uniformité de γ par rapport à e et φ), u_k et w_k sont aussi bornés ; par suite on peut extraire des sous suites telles que
$u_{k'} \rightharpoonup u_*$ dans H^1 faible
$w_{k'} \rightharpoonup w_*$ dans H^2 faible
$e_{k'} \rightharpoonup e_*$ dans $W^{1,\infty}$ faible$*$ et donc dans L^∞ fort
$\varphi_{k'} \rightharpoonup \varphi_*$ dans $W^{3,\infty}$ faible$*$ et donc $W^{2,\infty}$ fort ,
par suite $\varphi_k'' \longrightarrow \varphi_*''$ dans L^∞ fort donc $\dfrac{1}{R_{0k}} = \varphi_k'' \longrightarrow \dfrac{1}{R_{0*}}$ dans L^∞ fort
et le produit $\dfrac{1}{R_{0k}} w_k' \rightharpoonup \dfrac{1}{R_{0*}} w_*'$ dans H^1 faible.
Il suffit de reprendre la démonstration de la f.s.c.i. de Π par rapport à u, w pour en déduire que

$$\varepsilon_{k'} \rightharpoonup \varepsilon_* \quad \text{dans} \quad L^2 \quad \text{faible}$$

$$\chi_{k'} \rightharpoonup \chi_* \quad \text{dans} \quad L^2 \quad \text{faible}$$

Comme $e_{k'} \longrightarrow e_*$ dans L^∞ fort, on en déduit que $A_{k'} = b\, e_{k'}$ et $I_{k'} = \dfrac{e_{k'}^3}{12}$ convergent dans L^∞ fort.

Pour continuer nous ne pouvons plus utiliser le résultat classique sur la faible semi- continuité inférieure (f.s.c.i pour simplifier) des formes quadratiques puisque les coefficients dépendent aussi de k ; toutefois il suffit de remarquer

$$\frac{1}{2}\int E\, A_{k'}\, \varepsilon_{k'}^2 \;=\; \frac{1}{2}\int E\,(A_{k'} - A_*)\, \varepsilon_{k'}^2 \;+\; \int E\, A_*\, \varepsilon_{k'}^2$$

donc comme $A_{k'} - A_* \longrightarrow 0$ dans L^∞ fort, $\varepsilon_{k'}$ est borné :

$$\underline{lim} \int_0^\ell E\, A_{k'}\, \varepsilon_{k'}^2 \quad \geq \quad \int_0^\ell E\, A_*\, \varepsilon_*^2$$

et de même pour

$$\underline{lim} \int_0^\ell E\, I_{k'}\, \chi_{k'}^2 \quad \geq \quad \int_0^\ell E\, I_*\, \chi_*^2$$

donc

$$\underline{lim}\,\Pi(u_{k'}\ ,w_{k'}\ ,e_{k'}\ ,\varphi_{k'}) \geq \Pi(u_*\ ,w_*\ ,e_*\ ,\varphi_*)$$

mais comme la suite est minimisante

$$\Pi(u_{k'}\ ,w_{k'}\ ,e_{k'}\ ,\varphi_{k'}) \longrightarrow Inf\ \Pi(u\ ,w\ ,e\ ,\varphi)$$

$$\text{par suite} \qquad Inf\ \Pi(u\ ,w\ ,e\ ,\varphi) \;\; = \;\; \Pi(u_*\ ,w_*\ ,e_*\ ,\varphi_*)$$

■

Chapitre 3

Exemples manifestant des instabilités

Une présentation élémentaire pour étudiants d'ingéniérie mécanique peut se trouver dans L. Corradi Dell'Acqua [?]

3.1 Exemple à un degré de liberté

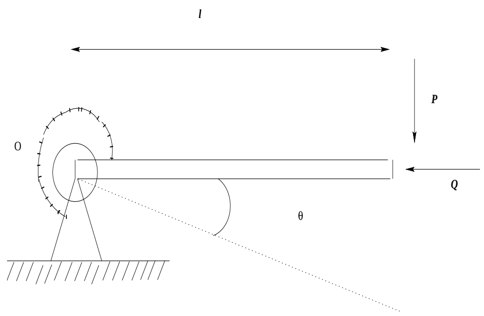

FIG. 3.1 – Barre Rigide avec rotule et ressort

La barre est supposée rigide et reliée à un support rigide par une rotule pourvue d'un ressort élastique qui s'oppose à la rotation θ suivant la loi de comportement linéaire :

$$M = c\,\theta \tag{3.1}$$

où M est le moment des forces, calculé au point O où est située la rotule.

Si l'on fait la mise en équation sur la barre au repos (hypothèse des petits déplacements de l'élasticité linéaire) on a l'équation d'équilibre

$$M \;=\; P\,\ell \tag{3.2}$$

puisque le moment de Q en O est nul, on a donc $c\,\theta \,=\, P\,\ell$ qui fournit une relation linéaire entre déformation θ et force appliquée P.

Noter que le déplacement de l'extrémité est :

$$\begin{cases} u \;=\; \ell\; cos\,\theta \;-\; \ell \\ w \;=\; \ell\; sin\,\theta \end{cases}$$

que l'on approche sous l'hypothèse des petits déplacements :

$$\begin{cases} u \;=\; 0 \\ w \;=\; \ell\;\theta \end{cases}$$

Si l'on fait la mise en équation sur la barre déplacée (hypothèses des grands déplacements)

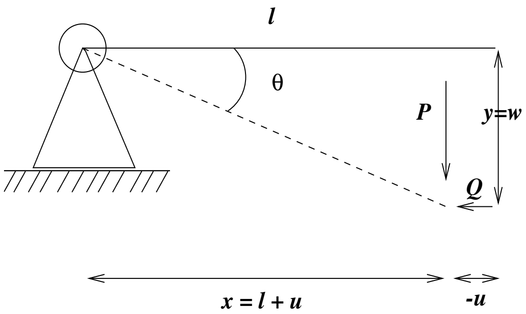

FIG. 3.2 – Barre déplacée

l'équation d'équilibre des moments en O devient avec :

$$\begin{cases} x \;=\; u \,+\, \ell \;=\; \ell\; cos\theta \\ \\ y \;=\; w \;=\; \ell\, sin\,\theta \end{cases}$$

$$M = P\,x + Q\,w \;=\; P\,\ell\, cos\theta \,+\, Q\,\ell\, sin\theta$$

d'où avec (2.12) l'équation non linéaire :

$$c\,\theta \;=\; P\,\ell\, cos\theta \,+\, Q\,\ell\, sin\theta.$$

Si l'on souhaite écrire l'équation à l'aide des déplacements, il faut inverser la relation $w = \ell sin\theta$ en $\theta \ = \ Arcsin \dfrac{w}{\ell}$ (notons au passage que cette relation est bijective pour $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$ ce qui est une restriction notable) on a alors :

$$c \; Arcsin \frac{w}{\ell} \quad = \quad P \, (u + \ell) \ + \ Q \, w,$$

mais nous avons maintenant deux inconnues pour une équation ; il convient de compléter en écrivant que la barre rigide :

$$(u + \ell)^2 \ + \ w^2 \quad = \quad \ell^2.$$

Cette relation est automatiquement vérifiée quand on exprime tous les déplacements avec la rotation θ qui est donc un parametrage plus commode.

Courbe pour $Q = 0$ solution de

$$\begin{cases} c\theta = P\ell & (1) \qquad \text{petits déplacements} \\ c\theta = P\ell cos\theta & (2) \qquad \text{grands déplacements} \end{cases}$$

Courbe pour $Q = 5P$ solution de

$$\begin{cases} c\theta = P\ell & (1) \qquad \text{petits déplacements} \\ c\theta = P\ell cos\theta + 5P\ell sin\theta & \\ \quad = P\ell(cos\theta + 5sin\theta) & (3) \qquad \text{grands déplacements} \end{cases}$$

Remarque *Théorie du second ordre* :
on écrit l'équilibre sur la barre déplacée mais on suppose de petits déplacements, l'équation d'équilibre devient :

$$M \ = \ P \, \ell \ + \ Q \, \ell \, \theta$$

d'où l'équation :

$$c \, \theta \ = \ P \, \ell \ + \ Q \, \ell \, \theta$$

θ apparait linéairement dans cette équation mais la relation entre θ et les forces appliquées ne l'est pas !

$$\theta \ = \ \frac{P \, \ell}{c \ - \ Q \, \ell}$$

par exemple si $Q = 5 \, P$ alors $\theta = \dfrac{P \, \ell}{c \ - \ 5 \, P \, \ell}$ ({Dessin courbe par Maple}).

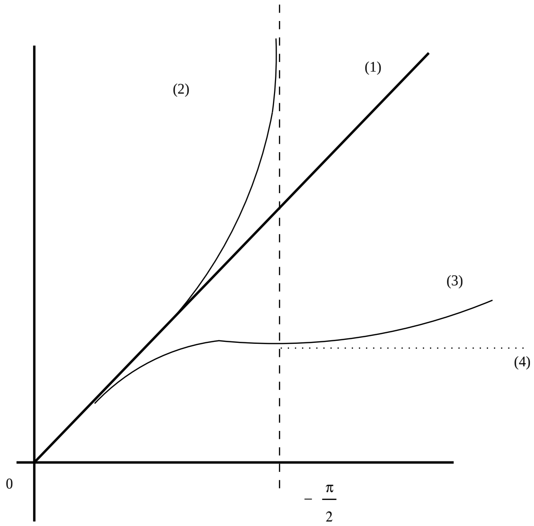

FIG. 3.3 – solution formelle du système

Une autre façon de réaliser la mise en équation est de considérer l'énergie potentielle totale

$$\Pi(\theta) \;=\; c\,\frac{\theta^2}{2} \;-\; P\,\ell\,sin\,\theta \;+\; Q\,\ell\,cos\,\theta$$

$\Pi'(\theta)$ redonne l'équation d'équilibre non linéaire générale mais nous pouvons aussi réaliser un développement à l'ordre 2 en θ de $\Pi(\theta)$:

$$\Pi(\theta) \;\simeq\; c\,\frac{\theta^2}{2} \;-\; P\,\ell\,\theta \;+\; Q\,\ell\,\left(1 \;-\; \frac{\theta^2}{2}\right)$$

l'équation d'équilibre s'écrit alors :
$c\theta \;-\; P\ell \;-\; Q\ell\theta \;=\; 0$
ce qui n'est autre que l'équation ci- dessu.
Remarque : Le terme du second ordre (et c'est là l'origine de la terminologie de la théorie du second ordre), provient de l'utilisation d'un développement à l'ordre 2 par rapport à θ de l'énergie potentielle.
Pour obtenir l'équation de l'élasticité linéaire, on néglige les termes d'ordre 3 par rapport aux forces et à θ : ici on néglige $Q\,\ell\,\theta$; dans ce cas on retrouve (2.28).

3.2 Une Version plus complète du même exemple

3.2.1 Introduction

Cet exemple classique est présenté par Potier-Fery [?] , (voir aussi [?]). C'est une version plus élaborée de l'exemple précédent.

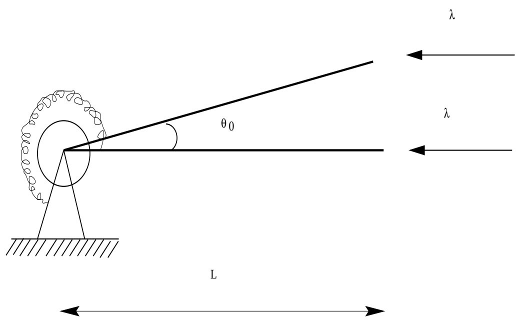

FIG. 3.4 – Barre rigide, imperfection horizontale

La barre rigide, munie d'une charnière avec ressort de rappel est soumise à une seule force horizontale d'intensité λ ; la barre peut être initialement horizontale ou légèrement tournée d'un petit angle θ_0 : on l'appelle imperfection géométrique pour une raison qui apparaîtra au cours des calculs.

L'équation d'équilibre est donc

$$\mathcal{G}(\theta, \lambda_0, \theta_0) \;=\; 0 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{G}(\theta, \lambda_0, \theta_0) \;=\; m(\theta) \;-\; \lambda L sin(\theta_0 + \theta) \tag{3.4}$$

$\lambda L sin(\theta_0 + \theta)$ est le moment au point O (où est située la charnière) de la force appliquée et $m(\theta)$ est le moment de rappel du ressort ; nous supposons que la loi de comportement du ressort est non linéaire.

$$m(\theta) \;=\; K_1\theta + K_2\theta^2 + K_3\theta^3 \tag{3.5}$$

Une notion fondamentale pour les systèmes non- linéaires est celle de stabilité. Pour les systèmes conservatifs il est habituel de définir la stabilité à partir de l'énergie potentielle totale Π.

dans une telle situation l'équation d'équilibre est donnée par (3.3) avec

$$\mathcal{G}(\theta, \lambda_0, \theta_0) \;=\; \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}(\theta, \lambda, \theta_0) \tag{3.6}$$

et un état d'équilibre θ est dit stable si

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \equiv \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2} \tag{3.7}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Une perte de stabilité correspond donc à l'existence d'un $q \neq 0$ telque

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2}\, q \;=\; 0 \tag{3.8}$$

Pour un exemple à un dégré de liberté cela revient à dire que $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2}$ s'annule ; pour un système à plusieurs dégrés de liberté ou pour un système continu, cela signifie qu'il existe un vecteur q tel que (2.19) soit vérifiée ; en d'autres termes zéro est valeur propre de $\dfrac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta^2}$.

Ce critère de stabilité est donné pour les systèmes discrets par le théorème de Lejeune-Dirichlet et on peut démontrer l'équivalence avec la stabilité dynamique définie à l'aide de petits mouvements.

3.2.2 Analyse du cas non perturbé ($\theta_0 = 0$)

Equation d'équilibre : $\mathcal{G} = 0$
avec

$$\mathcal{G} \equiv K_1\theta + K_2\theta^2 + K_3\theta^3 \;-\; \lambda\, L\, sin\theta \tag{3.9}$$

nous remarquons que $\theta = 0$ est une solution évidente ;
Etudions la <u>stabilité</u> de cet équilibre :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} = K_1 + 2K_2\theta + 3K_3\theta^2 - \lambda L cos\theta \tag{3.10}$$

$$\text{Pour} \qquad \theta = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}(0) \;=\; K_1 \;-\; \lambda\, L$$

$$\text{donc} \qquad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}(0) \;>\; 0 \;\; \text{pour} \qquad \lambda \;<\; \frac{K_1}{L}$$

ou $\theta = 0$ est une solution stable pour $\lambda \;<\; \dfrac{K_1}{L}$.

Nous allons maintenant faire une analyse locale autour de $\lambda_c = \dfrac{K_1}{L}$; posons $\lambda \;=\; \lambda_c + \mu$; faisons un dévellopement limité de $sin\theta$ dans (3.9) :

$$\mathcal{G} \equiv K_1\theta + K_2\theta^2 + K_3\theta^3 \;-\; (\lambda_c + \mu)L(\theta - \frac{\theta^3}{6}) + o(\mu\theta^3) \;=\; 0 \tag{3.11}$$

il reste :

$$\mathcal{G} \equiv K_2\theta^2 + \ (K_3 \ + \ L\frac{\lambda_c}{6})\theta^3 \ - \ L\mu\theta + \ o(\mu\theta^3) \ = \ 0 \tag{3.12}$$

soit
$$L\mu \ = \ K_2\theta + \ (K_3 \ + \ \frac{K_1}{6})\theta^2 \ + \ o(\mu\theta^2) \ = \ 0 \tag{3.13}$$

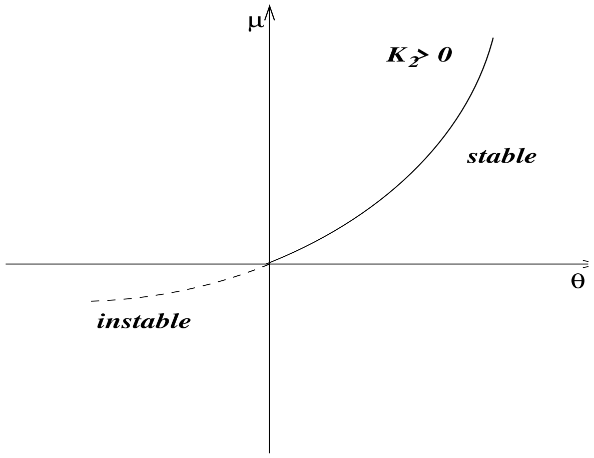

FIG. 3.5 – Etude de la stabilité de l'équilibre $\mathcal{G}$

Nous avons donc au voisinage de $\theta = 0$ et $\lambda = \lambda_c$, une autre solution $(\theta, \lambda_c + \mu)$ avec $\theta \longmapsto \mu$ donné par (3.13).

Etudions la stabilité de cette nouvelle solution en écrivant (3.12) par rapport à θ, à μ fixé :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \ = \ 2\,K_2\theta + \ 3(K_3 \ + \ \frac{L\lambda_c}{6})\theta^2 \ - L\,\mu \ + \ o(\mu\theta^2) \ = \ 0 \tag{3.14}$$

en fait il serait plus correct d'utiliser la formule exacte (3.10) et de dévelloper ensuite : mais cela redonne ici la même équation.

Substituons la valeur de $L\mu$ fournie par (3.13) dans (3.14) :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \ = \ K_2\theta + \ 2(K_3 \ + \ \frac{K_1}{6})\theta^2 \ + \ o(\mu\theta^2)$$

<u>Dans le cas où $K_2 \neq 0$</u> (ressort asymétrique) $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta}$ a donc le signe de $K_2\theta$ pour θ petit

<u>Dans le cas où $K_2 = 0$</u> (ressort symétrique)

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \theta} \ = \ 2\left(K_3 \ + \ \frac{K_1}{6}\right)\,\theta^2$$

dans ce cas la solution $(\theta, \lambda_c + \mu)$ est stable ou instable suivant le signe de $\left(K_3 \ + \ \dfrac{K_1}{6}\right)$.

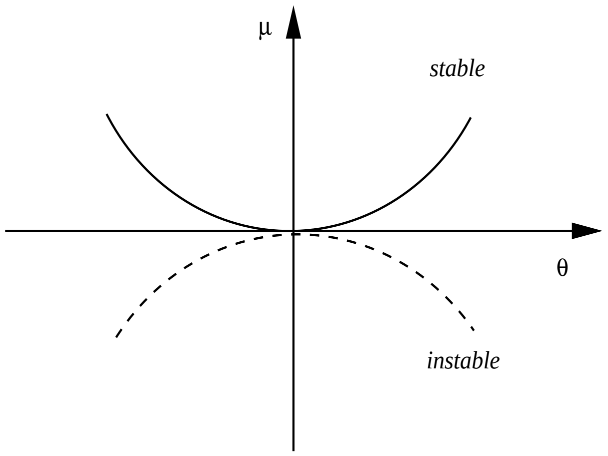

FIG. 3.6 – Exemple d'un ressort symétrique ($K_2 = 0$)

3.2.3 Analyse du cas perturbé ($a_0 \neq 0$)

Reprenons l'équation d'équilibre (1.2) avec m donné par (1.3) et développons par rapport au petit paramètre $\theta_0 + \theta$ avec $\lambda = \lambda_c + \mu$.

$$\mathcal{G} \;\equiv\; K_1\theta \;+\; K_2\theta^2 \;+\; K_3\theta^3 \;-\; L(\lambda_c \;+\; \mu)(\theta_0 + \theta - \frac{(\theta_0+\theta)^3}{6} \;+\; o((\theta_0+\theta)^3) \;\;=\;\; 0 \quad (3.15)$$

il reste avec $L\,\lambda_c \;=\; K_1$

$$K_2\theta^2 \;+\; (K_3 + \frac{K_1}{6})\theta^3 \;-K_1\theta_0 \;-\; L\,\mu\,\theta \;+\; o(|\mu\theta_0| \;+\; |\mu\theta^3|) \;\;=\;\; 0 \qquad (3.16)$$

d'où l'on peut encore tirer μ en fonction de θ (en notant que θ_0 n'est plus solution) :

$$L\,\mu \;=\; K_2\theta \;+\; (K_3 + \frac{K_1}{6})\theta^2 \;-K_1\,\frac{\theta_0}{\theta} \qquad (3.17)$$

Par rapport à l'équation non perturbée (3.13), il apparaît le nouveau terme $-\dfrac{K_1\theta_0}{\theta}$ qui modifie donc sensiblement le comportement de θ petit.

<u>Précisons</u> en particulier le cas important pour les applications où <u>$K_2 = 0$</u> et $K_3 + \dfrac{K_1}{6} < 0$; nous allons vérifier que $\theta \longmapsto \mu(\theta)$ admet un maximum : nous cherchons à résoudre $\dfrac{d\,\mu}{d\,\theta} \;=\; 0$ avec μ donné par (3.17) (avec $K_2 = 0$)

$$L\,\frac{d\,\mu}{d\,\theta} \;=\; 2\,(K_3 + \frac{K_1}{6})\theta \;+\; \frac{K_1\theta_0}{\theta^2} \qquad (3.18)$$

au maximum nous avons donc $\dfrac{K_1\theta_0}{\theta^2} \;=\; -\,2\,(K_3 + \dfrac{K_1}{6})\theta$ donc $\theta^3 \;=\; -\,\dfrac{K_1\theta_0}{2\,(K_3 + \frac{K_1}{6})}$ et avec (3.17) $L\mu = 3(K_3 + \dfrac{K_1}{6})\theta^2$ d'où :

$$L\;\mu_R = -3\Big|K_3 + \frac{K_1}{6}\Big|^{1/3}\left(\frac{K_1\theta_0}{2}\right)^{2/3} \qquad (3.19)$$

Le comportement du système perturbé est donc différent de celui du système non perturbé ; ce dernier possède au voisinage du point $\theta = 0$, $\lambda = \lambda_c$ deux solutions ce qui n'est pas le cas du premier ; il possède en revanche un point où la charge est maximum par rapport au déplacement.

Un peu de vocabulaire : $\theta = 0$, $\lambda = \lambda_c$ est un point de bifurcation ou de flambage pour le système non perturbé ; en revanche

$$\theta_R = \left| \frac{K_1 \theta_0}{2\,(K_3 + \frac{K_1}{6})} \right|^{1/3} \quad \text{et} \quad \lambda_R = \lambda_c + \mu_R$$

avec μ_R donné par (3.19) est un poit limite ou de retournement.

On vient de constater sur cet exemple qu'un point de bifurcation peut devenir un point de retournement et que $\mu_R = \lambda_R - \lambda_c$ n'est pas différentiable en $\theta_0 = 0$; ce qui signifie en pratique que μ_R n'est pas négligeable pour θ_0 petit ! Dans la situation considérée cela donne une <u>réduction</u> de la charge critique qui doit donc être prise en compte lors de la conception de la structure.

3.3 Arc peu profond discret

L'exemple est encore à un seul degré de liberté mais a un comportement différent de l'exemple précédent

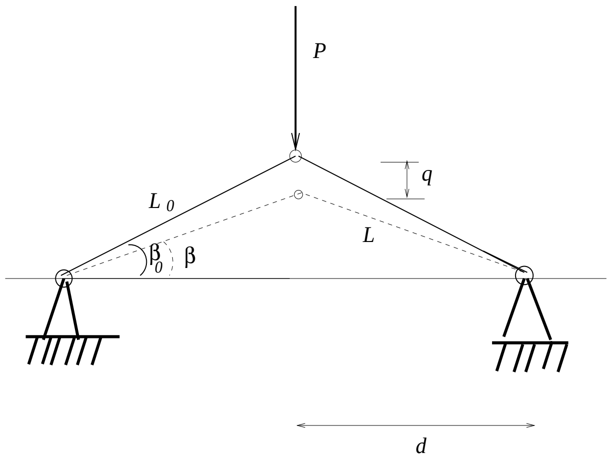

FIG. 3.7 – Barres en traction- compression (pas de flexion)

On suppose que les barres ne travaillent qu'en traction- compression (pas de flexion) ; pour des raisons de symétrie, la configuration déformée peut être décrite à l'aide d'un seul paramètre de déplacement vertical $q = L_0 \, sin \, \beta_0 - L(\beta) \, sin \, \beta$.
Cet exemple fut proposé par Almroth [?] (1973).
Mise en equation :
· *allongement relatif :* $\varepsilon = \dfrac{L - L_0}{L_0}$ or

$$L = \frac{d}{cos \, \beta} = \frac{L_0 \, cos \, \beta_0}{cos \, \beta} \quad , \text{ d'où}$$

$\varepsilon = -\left(1 - \dfrac{cos \, \beta_0}{cos \, \beta}\right)$ et $q = L_0 \left(sin \, \beta_0 - \dfrac{cos \, \beta_0}{cos \, \beta} sin \, \beta\right)$; l'effort normal $n = E \, A \, \varepsilon$.
Deux façons équivalentes de procéder :
• *Equilibre des forces sur la configuration déformée, inconnue (grands déplacements) :*

$$-2 \, n \, sin \, \beta = P$$

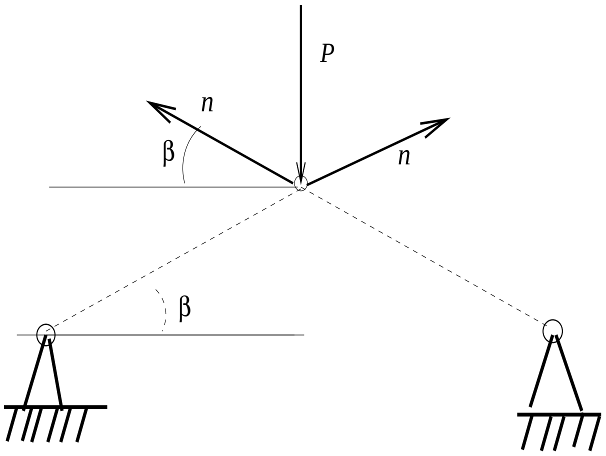

Fig. 3.8 – Equilibre des forces

• *Principe des travaux virtuels (P.T.V.) :*

$$\delta\varepsilon = \frac{cos \, \beta_0 \, sin \, \beta}{cos^2 \, \beta} \, \delta\beta \qquad \delta q = -L_0 \, cos \, \beta_0 \, \frac{1}{cos^2 \, \beta} \, \delta\beta$$

d'où le P.T.V. $2 \, L_0 \, n \, \delta\varepsilon = P \, .\delta q$ (le L_0 provient de l'intégration le long de la barre) fournit :

$$2n \, \frac{cos \, \beta_0 \, sin \, \beta}{cos^2 \, \beta} = -P \; cos \, \beta_0 \, \frac{1}{cos^2 \, \beta}$$

ce qui redonne bien la même l'équation d'équilibre.
Notons au passage que l'énergie totale est

$$\Pi(\beta) = 2 \, L_0 \, \frac{E \, A \, \varepsilon^2}{2} - P \, q \, ; \qquad \text{le P.T.V n'est autre que :} \;\; \Pi'(\beta) = 0$$

Equation pour le déplacement :

$$2\,E\,A\left(1-\frac{cos\,\beta_0}{cos\,\beta}\right)\,sin\,\beta\;=\;P$$

Stabilité de l'équilibre :

$$\Pi''(\beta)=2\,E\,A\,L_0\left[-\frac{cos\,\beta_0\;sin^2\,\beta}{cos^2\beta}+\left(1-\frac{cos\,\beta_0}{cos\,\beta}\right)cos\,\beta\right]\frac{cos\,\beta_0}{cos^2\,\beta}+\frac{d}{d\beta}\left(\frac{cos\beta_0}{cos^2\beta}\right)(2n\,sin\,\beta-P)$$

le dernier terme est nul (équation d'équilibre).

$$\Pi''(\beta)\;=\;2\;E\;A\;\frac{(cos^3\beta\;-\;cos\,\beta_0)}{cos^4\beta}cos\,\beta_0$$

la perte de stabilité a donc lieu pour $cos^3\beta_c\;=\;cos\,\beta_0$.

Nature de la courbe $P(\beta)$

Pour $(\beta\;-\;\beta_0)$ petit :

$$P\;=\;2\;E\;A\;(cos\,\beta\;-\;cos\,\beta_0)\;tg\,\beta\qquad\text{s'approche par}$$

$$P\;=\;-\,2\;E\;A(sin^2\beta_0)(\beta\;-\;\beta_0)\qquad\text{avec}\quad\beta<\beta_0$$

La courbe admet un maximum relatif au point où

$$\Pi''(\beta_c)\;=\;0\qquad cos^3\beta\;-\;cos\,\beta_0\;=\;0$$

2 solutions :

$$\beta_c\;=\;\pm Arc\,cos\left((cos\,\beta_0)^{1/3}\right)$$

exemple

$cos\,\beta_0=0.995$ pour $\beta_0=0,1$, et $\beta_c\simeq\;\pm 0,05776$.

Exercice 1 : Retrouver l'équation linéaire ci-dessus en l'accroissement $(\beta\;-\;\beta_0)$, en écrivant l'équilibre statique sur la configuration non déformée.

Exercice 2 : • tracer la courbe $P(\beta)$.

• tracer $\Pi(\beta)$ pour diverses valeurs de $P<P_c$ ou $P>P_c$ avec P_c associé à β_c ci-dessus.

3.4 Un exemple à deux degrés de liberté

Cet exemple est présenté par Corradi Del Acqua [?] (1990) ; c'est une version plus élaborée de l'exemple 3.1 ; il s'agit encore de barres, supposées rigides et articulées avec des rotules

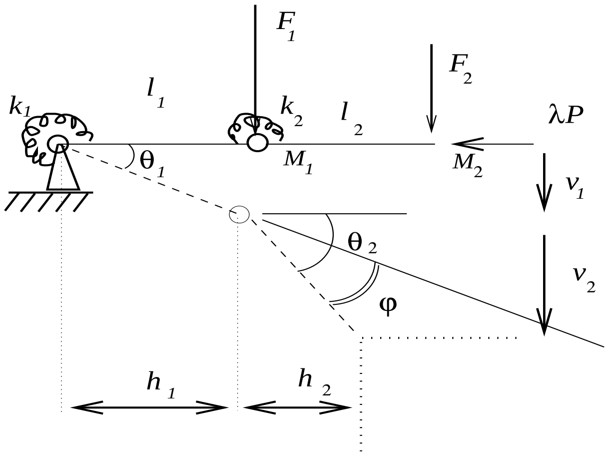

FIG. 3.9 – Un exemple à deux degrés de liberté

sans frottement mais munies de ressort de constante de rigidité k_1 et k_2 ; elles sont soumises à des forces appliquées en M_1 et M_2 ; on a les relations suivantes entre les angles et les positions

$$\begin{cases} h_1 = \ell_1 \, cos\, \theta_1 \\ h_2 = \ell_2 \, cos\, \theta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = \ell_1 \, sin\, \theta_1 \\ v_2 = \ell_2 \, sin\, \theta_2 \end{cases} \tag{3.20}$$

à noter que θ_1 est la rotation de la première barre alors que $\varphi = \theta_2 - \theta_1$ est la rotation de la deuxième barre par rapport à la première.
L'énergie de déformation est donc :

$$W(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2}\, k_1 \, \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \, (\theta_2 - \theta_1)^2 \tag{3.21}$$

tandis que le travail des forces extérieures

$$\mathcal{T} = F_1 \, v_1 + F_2 \, (v_1 + v_2) + \lambda \, P \, (\ell_1 + \ell_2 - h_1 - h_2)$$

ou :

$$\mathcal{T} = F_1 \, \ell_1 \, sin\, \theta_1 + F_2 \, (\ell_1 \, sin\, \theta_1 + \ell_2 \, sin\, \theta_2) + \lambda \, P \, (\ell_1(1 - cos\, \theta_1) + l_2(1 - cos\, \theta_2)) \tag{3.22}$$

L'énergie potentielle totale est donc

$$\Pi(\theta_1, \theta_2) = W - \mathcal{T} \tag{3.23}$$

et l'équation d'équilibre sous forme principe des travaux virtuels

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1}\,\delta\theta_1 \;+\; \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2}\,\delta\theta_2 \;=\; 0 \tag{3.24}$$

ou encore

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_i} \;=\; 0\,, \qquad i = 1, 2.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} &= (k_1\,\theta_1 - k_2\,(\theta_2 - \theta_1) \;-\; F_1\,\ell_1\,cos\,\theta_1 \;-\; F_2\,\ell_1\,cos\,\theta_1 \;-\; \lambda\,P\,\ell_1\,sin\,\theta_1) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} &= k_2\,(\theta_2 - \theta_1) \;-\; F_2\,\ell_2\,cos\,\theta_2 \;-\; \lambda\,P\,\ell_2\,sin\,\theta_2 \end{aligned}\right. \tag{3.25}$$

<u>Méthode incrémentale (voir §2.2.2)</u> : λ paramètre de charge : λP force appliquée

$$\mathcal{G}(\theta, \lambda) \;=\; \frac{\partial \Pi}{\partial \theta}(\theta, \lambda) \;=\; 0$$

équation incrémentale :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial\,\theta}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,\lambda} \;+\; \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial\,\lambda} \;=\; 0 \qquad \text{ou}$$

$$\frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta^2}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,\lambda} \;+\; \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\lambda\,\partial\theta} \;=\; 0 \tag{3.26}$$

<u>Explicitons :</u>

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\lambda\,\partial\theta_1} &= -P\ell_1\,sin\,\theta_1 \\ \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\lambda\,\partial\theta_2} &= -P\ell_2\,sin\,\theta_2 \end{aligned}\right. \tag{3.27}$$

tandis que $\dfrac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta^2}$ est une matrice 2×2 de coefficients

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta_1^2} &= (k_1 \;+\; k_2 \;+\; F_1\,\ell_1\;\,sin\,\theta_1 \;+\;\; F_2\,\ell_1\;\,sin\,\theta_1 \;-\; \lambda\;P\;\;\ell_1\,cos\,\theta_1) \\ \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta_2^2} &= (\;k_2 \;+\; F_2\,\ell_2\;\,sin\,\theta_2 \;+\; -\;\lambda\;P\;\;\ell_2\,cos\,\theta_2) \\ \frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta_1\,\partial\theta_2} &= (\;-\;k_2\;) \end{aligned}\right. \tag{3.28}$$

Pour $\theta_1\; = 0$ et $\theta_2\; = 0$ nous trouvons

$$\frac{\partial^2\,\Pi}{\partial\,\theta_1^2} \;=\; k_1 \;+\; k_2 \;\;-\; \lambda\;P\;\;\ell_1$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} = k_2 \; - \lambda \, P \; \ell_2$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_2} = - \, k_2$$

Cette matrice est donc inversible quand

$$(\, k_1 \; + \; k_2 \; - \lambda \, P \; \ell_1) (\, k_2 \; - \lambda \, P \; \ell_2) \; - \; k_2^2 \; \neq \; 0$$

Comme c'est le cas pour $\lambda \; = \; 0$; la méthode incrémentale peut donc s'appliquer pour λ F_1 , F_2 petits.

Nous allons préciser ceci avec une approximation à l'ordre 2.

<u>Théorie du second ordre</u> : Elle consiste à considerer un dévellopement à l'ordre deux de l'enérgie potentielle (revoir l'exemple 3.1)

$$\mathcal{T} \; \simeq \; F_1 \, \ell_1 \, \theta_1 \; + \; F_2 \, (\ell_1 \, \theta_1 \; + \; \ell_2 \, \theta_2) \; + \lambda \, P \, \left(\ell_1 \, \frac{\theta_1^2}{2} \; + \; \ell_2 \, \frac{\theta_2^2}{2} \right)$$

$$\Pi \; = \; \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (\theta_2 - \theta_1) \; - F_1 \, \ell_1 \, \theta_1 - \; F_2 \, (\ell_1 \, \theta_1 \; + \; \ell_2 \, \theta_2) - \lambda \, P \, \left(\ell_1 \, \frac{\theta_1^2}{2} \; + \; \ell_2 \, \frac{\theta_2^2}{2} \right)$$

<u>Equation d'équilibre</u> : $\dfrac{\partial \Pi}{\partial \theta}$ avec

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} \; = \; k_1 \theta_1 - k_2 (\theta_2 - \theta_1) - F_1 \, \ell_1 - F_2 \, \ell_1 \; - \; \lambda \, P \ell_1 \theta_1$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} \; = \; k_2 (\theta_2 - \theta_1) - F_2 \, \ell_2 \; - \; \lambda \, P \ell_2 \theta_2$$

<u>Stabilité</u> (dérivée seconde de l'énergie définie positive)

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} \; = \; k_1 \; + \; k_2 \; - \lambda \, P \, \ell_1$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \, \partial \theta_2} \; = \; - \, k_2$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} \; = \; k_2 \; - \; \lambda \, P \, \ell_2$$

La position d'équilibre est stable quand

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 \; + \; k_2 \; - \lambda \, P \, \ell_1 \; > \; 0 \\ \\ (\, k_1 \; + \; k_2 \; - \lambda \, P \, \ell_1) (\, k_2 \; - \; \lambda \, P \, \ell_2) \; - \; k_2^2 \; > \; 0 \end{array} \right. \tag{3.29}$$

ce qui est donc le cas pour λ_0 petit ; mais cette théorie suppose aussi F_1, F_2 petits.
Perte de stabilité : Une valeur propre nulle et l'autre positive ; ce ne peut être $k_1 + k_2 - \lambda P \ell_1 = 0$ car dans ce cas le determinant est strictement négatif ; λ est donc donné par les deux solutions de $(k_1 + k_2 - \lambda P \ell_1)(k_2 - \lambda P \ell_2) - K_2^2 = 0$
Dans ce cas λ peut être calculé explicitement.

$$P^2 \ell_1 \ell_2 \lambda^2 - -\lambda P [\ell_1 k_2 + \ell_2 (k_1 + k_2)] + k_1 k_2 = 0$$

et en posant

$$\Delta = \Big\{ [\ell_1 k_2 + \ell_2 (k_1 + k_2)]^2 - 4 k_1 k_2 \ell_1 \ell_2 \Big\} P^2$$

ceci fournit :

$$\lambda = \frac{P \; [\ell_1 k_2 + \ell_2 (k_1 + k_2)] \pm \Delta^{\frac{1}{2}}}{2 P^2 \ell_1 \ell_2}$$

d'où par exemple

$$\frac{\partial \lambda}{\partial k_1} = \frac{P \ell_2 \pm \frac{1}{2} \Delta^{-1/2} \Delta'}{2 P^2 \ell_1 \ell_2}$$

avec $\Delta' = 2 (\ell_1 k_2 + \ell_2 (k_1 + k_2)) \ell_2 - 4 k_2 P^2 \ell_1 \ell_2$
Nous allons voir au §4 une méthode générale pour calculer la sensitivité de la charge critique, par rapport à des variables de conception (i.e. ses dérivées partielles).
Le signe de $\dfrac{\partial\lambda}{\partial k_1}$ indique si la charge croit ou décroit en augmentant k_1 ; ce renseignement est très utile pour la conception de structure.

Chapitre 4

Calcul de sensitivité

4.1 Méthodes générales

Premier Cas : l'analyse est linéaire.

$$\mathcal{G}(U,\varphi) \equiv K\,U \;-\; F \;=\; 0 \tag{4.1}$$

avec $K(\varphi)$ dépend de paramètre φ. U est fonction implicite de φ et il est dérivable quand Kest inversible (théorème des fonctions implicites) :

$$K\;\frac{\partial\,U}{\partial\,\varphi} \;=\; -\frac{\partial\,K}{\partial\,\varphi}\,U \;+\; \frac{\partial\,F}{\partial\,\varphi} \tag{4.2}$$

Cette équation peut être utilisée de deux façons

2 méthodes :

a) méthode directe (quand φ est dans un espace de dimension finie), on résout $K\;\frac{\partial\,U}{\partial\,\varphi_i} \;=\; -\frac{\partial\,K}{\partial\,\varphi_i} \;+\; \frac{\partial\,F}{\partial\,\varphi_i}$ (autant de seconds membres que de variables de conception)

b) méthode de l'état adjoint pour avoir la dérivée de la fonction de $j(U)$

$$J(\varphi) \;=\; j(U_\varphi) \qquad\qquad \frac{\partial\,J}{\partial\,\varphi} \;=\; j'(U_\varphi)\frac{\partial\,U}{\partial\,\varphi} \;=\; {}^t grad\,j\,.\,\frac{\partial U}{\partial \varphi} \tag{4.3}$$

on voit que si l'on connait p solution de ${}^t p\,K \;\equiv\; {}^t grad\;j$, (4.2) fournit

$$\frac{\partial\,J}{\partial\,\varphi} = {}^t grad\;j.\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -{}^t pK\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -{}^t p\,K\,\frac{\partial U}{\partial \varphi} - {}^t p\,\frac{\partial F}{\partial \varphi} \tag{4.4}$$

p est solution de l'équation adjointe

$${}^t K\,p \;=\; -\,gradj \tag{4.5}$$

Cas particulier $(i)\, j(U) \ = U_{i_0} \quad grad\, j \ = \delta_{i_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1 sur la ligne i_0),

${}^tK\, p = \delta_{i_0}$ (analogue discret de la solution élémentaire d'une équation différentielle) notons que si $F = \delta_{i_0}$ et $K = {}^tK \quad p = U$

$$(ii) \quad J(\Phi) \ = \ j(U_\varphi) \ = \ \frac{1}{2}\, {}^tU_\varphi\, K(\varphi)\, U_\varphi \ - \ {}^tU_\varphi\, F \tag{4.6}$$

notons d'abord qu'avec l'équation d'équilibre (4.2) on a aussi ${}^tU\ K\ U \ = \ {}^tU\ F$ et donc

$$j(U) \ = \ -\frac{1}{2}\, {}^tU\ F \ = \ -\frac{1}{2}\, {}^tU\ K\ U$$

et donc $\quad grad\, j \ = \ -\frac{1}{2}\ F \ = \ -\frac{1}{2}\ K\ U$
on a donc

$${}^tK\ \ P \ = \ -\frac{1}{2}\ F$$

d'où dans le cas où $K \ = {}^tK \quad p \ = -\frac{1}{2} U$ et $\dfrac{\partial J}{\partial \Phi} = -\dfrac{1}{2}\, U\, \dfrac{\partial K}{\partial \Phi}\, U \ + \ \dfrac{1}{2}\, {}^tU\, \dfrac{\partial F}{\partial \Phi}$
remarquer que c'est l'opposé de la dérivée partielle de (4.6) par rapport aux variables de conception.

Deuxième cas : L'analyse est non linéaire

$$\mathcal{G}\,(U\,,\lambda\,,\varphi\,) \ = \ 0 \tag{4.7}$$

Nous nous plaçons à un niveau de charge λ fixé ; et nous souhaitons déterminer la sensitivité d'une fonction $J(\varphi) \ = \ j(U_\varphi)$ par rapport à des variations de φ ou en termes plus mathématiques nous cherchons la différentielle de la fonction implicite $\varphi \longmapsto U_\varphi$ défini par (4.7) . Il est important de remarquer que la situation est conceptuellement analogue à la méthode incrémentale par rapport au niveau de charge λ (Haftka - Mróz [?] 1994) ; la seule différence est que φ est une variable vectorielle et non scalaire comme λ.
Pour simplifier, plaçons nous ici dans le cas où $\varphi \in \mathbb{R}^n$, nous souhaitons calculer les dérivées partielles de $\varphi \longmapsto U_\varphi$; l'existence de ces dérivées partielles résulte encore du théorème des fonctions implicites comme pour la méthode incrémentale :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial U}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} \ + \ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi_i} \ = \ 0\,.$$

En d'autres termes quand on peut utiliser la méthode incrémentale, on peut aussi calculer les dérivées partilles par rapport à toute variable de conception.

Lorsque la méthode incrementale ne peu plus s'utiliser ($\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial U}$ non inversible) on est en présence d'un point d'instabilité ; de nombreuses méthodes ont été développées pour l'analyse de cette situation (Crisfield [?]) ; pour le calcul de sensitivité les résultats sont récents (Dems - Mróz 1994 [?]) , Aubert 1995/1996 [?]).
En admettant que ces calculs ont un sens indiquons comment on peut déterminer la sensitivité d'une charge critique du type point limite : le noyau de $\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial U}$ est de dimension 1 (ou point de retournement) ; dérivons (4.7) avec cette fois -ci λ fonction de φ :

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi_i} = 0 \, ,$$

soit q tel que ${}^t q \, \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial U} = 0$ on obtient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi_i} = \frac{-{}^t q \, \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \varphi_i}}{{}^t q \, \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \lambda}}$$

Chapitre 5

Modèle de poutre en grand déplacement

5.1 Introduction

Nous partons d'un modèle plan en grands déplacements proposé par Fried [?] (1983) et etudié du point de vue de l'optimisation de formes par Aubert [?] (1995/1996).
L'énergie de déformation comprend un terme de traction- compression et un terme de flexion ; il n' y a pas d'énergie de cisaillement à la différence d'un modèle d'Antman [?] (1981) (see also [?] (1991)) Simo [?] (1986).

$$W(x,y) \quad = \quad \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(E\, A\, \varepsilon^2 \quad + \quad E\, I\, \chi^2 \right)\, ds \tag{5.1}$$

Avant d'indiquer la relation déformation- déplacement, précisons quelques notations. Comme il s'agit d'un problème en grands déplacements il faut distinguer la configuration au repos et la configuration chargée.

Nous ne considérons ici que les lignes moyennes (le lien avec le tridimensionnel : voir §?)
Ligne moyenne au repos : parametrisée par son abscisse curviligne $s \longmapsto \begin{pmatrix} x_0(s) \\ y_0(s) \end{pmatrix}$ (composantes dans une base globale) ; on a donc ${x'}_0^2(s) + {y'}_0^2(s) = 1$ (propriété de l'abscisse curviligne).
Nous utilisons des repères locaux

vecteur tangent

$$\tau_0(s) = \begin{pmatrix} x'_0(s) \\ y'_0(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta_0 \\ sin\theta_0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

où θ_0 est l'angle entre l'axe des x et le vecteur τ_0 ;

$$\frac{d\tau_0}{ds} = \begin{pmatrix} x''_0 \\ y''_0 \end{pmatrix} = \theta'_0 \begin{pmatrix} -sin\theta_0 \\ cos\theta_0 \end{pmatrix} = \theta'_0 \begin{pmatrix} -y'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

on pose

$$\nu_0 = \begin{pmatrix} -sin\theta_0 \\ cos\theta_0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad K_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{d\theta_0}{ds} \tag{5.4}$$

(la courbure ou l'inverse du rayon de courbure) on a aussi

$$\frac{d\nu_0}{ds} = \theta'_0 \begin{pmatrix} -cos\theta_0 \\ -sin\theta_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{R_0}\tau_0$$

Exercice : Montrer qu'un cercle centré en $(0, -R)$ et de rayon R est au voisinage de l'origine localement un graphe $Y = -\frac{-X^2}{2R^2} + o(X^2)$

- Ecrire $\begin{pmatrix} x_0(s+\delta s) \\ y_0(s+\delta s) \end{pmatrix}$ pour δs petit dans le repère (τ_0, ν_0)
- Retrouver l'interprétation du rayon de courbure.

<u>Ligne moyenne chargée</u> si s_1 est son abscisse curviligne des formules analytiques fournissent le repère local et la courbure ; cependant pour mettre en évidence l'allongement relatif nous sommes amenés à paramétrer cette courbe chargée par l'abscisse curviligne s de la courbe au repos ; d'un point de vue pratique il serait illusoire d'utiliser s_1 pour une courbe qui est à déterminer (inconue du problème).

Dans ce cas

$$a_1 \quad = \quad \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

n'est pas unitaire. La différentielle de l'abscisse curviligne est donnée par

$$ds_1 = \|a_1\| ds = \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}\; ds \tag{5.6}$$

<u>L'allongement relatif</u> d'un élément de longueur ds est donc

$$\varepsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} = \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \tag{5.7}$$

Le changement de courbure

Nous allons utiliser la formule classique de la courbure :

$$K \;=\; \frac{x'\,y'' \;-\; x''\,y'}{(\,x'^2 \;+\; y'^2\,)^{3/2}} \tag{5.8}$$

Exercice : Retrouver cette formule en remarquant que

$$a_1 = (1+\varepsilon)\begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

solution :

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = a_1' = \varepsilon' \begin{pmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{pmatrix} + (1+\varepsilon)\theta' \begin{pmatrix} -sin\theta \\ cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{donc}$$

$$a_1 \wedge a_1' = (1+\varepsilon)^2\theta'\vec{e_3} \;\; (e_3 \text{ vecteur orthogonal au plan de la courbe }) \tag{5.10}$$

d'autre part

$$a_1 \wedge a_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x'y'' - x''y' \end{pmatrix} = (x'y'' - x''y')\;\vec{e_3} \quad \text{on a donc}$$

$$\theta' = \frac{x'y'' - x''y'}{(1+\varepsilon)^2} \tag{5.11}$$

on obtient

$$K = \frac{d\theta}{ds_1} = \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{ds_1} = \frac{x'y'' - x''y'}{(1+\varepsilon)^3}$$

qui est la formule classique.

Le modèle est donc complètement défini :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \\ \\ \chi = K - K_0 = \dfrac{x'y'' - x''y'}{(1+\varepsilon)^3} - (x_0'y_0'' - x_0''y_0') \end{array} \right. \tag{5.12}$$

5.2 Expression en repère local

Pour obtenir des modèles approchés, nous avons besoin d'utiliser le repère local (τ, ν) de la courbe au repos ; c'est en particulier dans ce repère que l'on peu exprimer le changement de longueur linéarisé.

Nous écrivons donc : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u\,\vec{\tau_0} \ + \ w\,\vec{\nu_0}$

$$\begin{aligned} a_1 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} + u'\ \tau_0 + \frac{u}{R_0}\ \nu_0 + w'\ \nu_0 - \frac{w}{R_0}\ \tau_0 \\ &= \ \left(1 + u' - \frac{w}{R_0}\right) \tau_0 + \left(\frac{u}{R_0} + w'\right) \nu_0 \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{cases} \varepsilon_\ell = \ u' - \dfrac{w}{R_0} \\ \\ \varphi_\ell = \dfrac{u}{R_0} + w' \end{cases} \tag{5.13}$$

on a donc

$$a_1 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (1 + \varepsilon_\ell)\ \ \tau_0 + \varphi_\ell\ \nu_0 \tag{5.14}$$

$$a_{11} = x'^2 + y'^2 = (1 + \varepsilon_\ell)^2 + \varphi_\ell^2$$

et donc avec (5.14) :

$$\varepsilon = \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 = \left[(1 + \varepsilon_\ell)^2 + \varphi_\ell^2\right]^{1/2} - 1 \tag{5.15}$$

on a donc l'allongement relatif linéarisé donné par :

$$\varepsilon_\ell = u' - \frac{w}{R_0} \quad \text{ce qui justifie la notation (5.13)} \tag{5.16}$$

D'autre part

$$a'_1 = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left(\varepsilon'_\ell - \varphi_\ell \theta'_0\right) \tau_0 + \left[(1 + \varepsilon_\ell)\theta'_0 + \varphi'_\ell\right] \nu_0$$

d'où

$$a_1 \wedge a'_1 = \left\{(1 + \varepsilon_\ell)\left[(1 + \varepsilon_\ell)\theta'_0 + \varphi'_\ell\right] - \varphi_\ell \left(\varepsilon'_\ell - \varphi_\ell \theta'_0\right)\right\} e_3$$

d'où en rapprochant de (5.10)

$$\frac{d\theta}{ds_0} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2} \left\{(1 + \varepsilon_\ell)\left[(1 + \varepsilon_\ell)\theta'_0 + \varphi'_\ell\right] - \varphi_\ell \left(\varepsilon'_\ell - \varphi_\ell \theta'_0\right)\right\}$$

et

$$K = \frac{d\theta}{ds_1} = \frac{1}{(1+\varepsilon)^3} \left\{(1 + \varepsilon_\ell)^2 \theta'_0 + (1 + \varepsilon_\ell)\varphi'_\ell - \varphi_\ell \varepsilon'_\ell + \varphi_\ell^2 \theta'_0\right\} \tag{5.17}$$

Pour préciser l'angle φ de rotation de la tangente effectuons avec (5.14) $\tau_0 \wedge a_1 \;=\; \varphi_\ell \;\vec{e_3}$, comme $a_1 = (1+\varepsilon)\,\tau$, $\quad \tau_0 \wedge \tau = \dfrac{\varphi_\ell}{1+\varepsilon} e_3$ si bien que $\;sin\,\varphi = \dfrac{\varphi_\ell}{1+\varepsilon}$ et l'on trouve donc que la rotation linéarisée de la tangente est donnée par

$$\varphi_\ell = \frac{u}{R_0} + w' \qquad \text{voir (5.13)} \tag{5.18}$$

Variation linéarisée de courbure : nous allons linéariser par rapport aux déplacements :

$$K - K_0 = K - \theta_0'$$

(5.17) fournit :

$$\begin{aligned} K &= \left(1 - 3\varepsilon + o(\varepsilon^2)\right)\left(\theta_0' + 2\varepsilon_\ell\theta_0' + \varphi_\ell + o(\varepsilon_\ell + \varphi_\ell + \varphi_\ell')\right) \\ &= \theta_0' + 2\varepsilon_\ell\theta_0' + \varphi_\ell' - 3\varepsilon\theta_0' + o(\varepsilon_\ell + \varphi_\ell + \varphi_\ell') \end{aligned}$$

or $\varepsilon = \varepsilon_\ell + o(\varepsilon)$, donc

$$(K - K_0)_\ell \;=\; \varphi_\ell' \;-\; \varepsilon_\ell\theta_0' \qquad \underline{\text{variation linéarisée de courbure}} \tag{5.19}$$

$$(K - K_0)_\ell \;=\; \left(\frac{u}{R_0} + w'\right) \;-\; \left(u' - \frac{w}{R_0}\right)\frac{1}{R_0}$$

Dans les cas courants on prends souvent comme approximation :

$$(K - K_0)_\ell \;\simeq\; \varphi_\ell' \;=\; \left(\frac{u}{R_0} + w'\right)'$$

Dans le cas peu profond grand rayon de courbure (et déplacement tangent très petit devant le déplacement normal) la formule (5.18) fournit

$$\varphi_\ell \simeq w' \quad \text{et} \quad (K - K_0)_\ell \;\simeq\; w'' \tag{5.20}$$

Déplacements modérés et petites rotations : déformation à l'ordre 2 :

Repartons de (5.14), un dévellopement limité fournit :

$$\varepsilon \;=\; \varepsilon_\ell \;+\; \frac{1}{2}\varphi_\ell^2 \;+\; o(\varepsilon_\ell^2 + \varphi_\ell^2)$$

avec φ_ℓ donné par (5.18) ; dans le cas peu profond on a $\varphi_\ell \simeq w'$ et $\chi_\ell = (K - K_0)_\ell \simeq w''$.

Problème *Examen de DEA Université de Nice- Sophia Antipolis (Janvier 1997)*

Avec les notations du cours, on considère une poutre *inextensible* : $\varepsilon = 0$ et rectiligne au repos : $\theta_0 = 0$

(1)

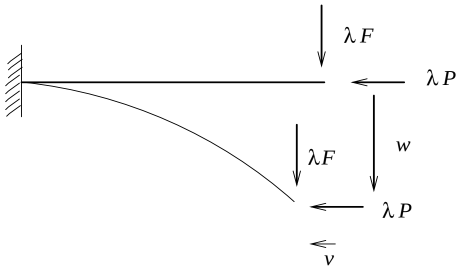

FIG. 5.1 – poutre *inextensible*

(a) exprimer v et w à partir de θ ; travail $\mathcal{T}$.

(b) Matériaux élastique linéaire ; énergie potentielle totale Π (exprimée en θ).

(c) Pour θ petit, approcher $\mathcal{T}$ par une expression quadratique ou une expression linéaire ; énergie correspondante.

(d) Pour les expressions approchées, exprimer en déplacement (repère "local") l'énergie Π ; donner une expression linéarisée de τ par rapport à u et w.

(2)

(a) Pour le Π exact exprimé en θ, calculer Π' et Π''.

(b) Montrer que A (l'opérateur associé à $\Pi''(\theta, \delta\theta, \bar{w}\theta)_{|_{\theta=0}}$ est un isomorphisme de L^2 sur $V = \{\beta \in H^2(0,\ell)\ ,\ \beta(0) = 0\}$).

(c) justifier la méthode incrémentale.

(d) justifier le calcul de sensitivité de $I \longmapsto \theta(\ell)$.

(3) Dans le cas où τ est linéaire, fournir une méthode de calcul de dérivée $I \longmapsto w(\ell)$.

Corrigé :

(a) Comme la poutre est inextensible on peut paramétrer la courbe déformée par son abscisse curviligne égale à celle de l'abscisse curviligne de la courbe au repos s_0 ; si bien que

$\tau = \dfrac{dx}{ds_0}$ est un vecteur unitaire comme $\tau_0 = \dfrac{dx_0}{ds_0}$; on choisit le repère global de telle façon que $\begin{cases} x_1^0(s) &= s \\ x_2^0(s) &= 0 \end{cases}$ et $\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} cos\,\theta \\ sin\,\theta \end{pmatrix}$, d'où

$$\begin{cases} x_1(s) &= \int_0^s cos\,\theta\, ds_0 \\ x_2(s) &= \int_0^s sin\,\theta\, ds_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{et}\ \ u(s) &= x_1(s) - s = \int_0^s (cos\,\theta - 1)\, ds_0 \\ w(s) &= x_2(s) - 0 = \int_0^s sin\,\theta\, ds_0 \end{aligned}$$

le travail est donc

$$\mathcal{T} = -\lambda\, P\, u(\ell) + \lambda\, F\, w(\ell) = -\lambda\, P \int_0^\ell (cos\,\theta - 1)\, ds_0 + \lambda\, F \int_0^\ell sin\,\theta\, ds_0$$

le signe $-$ devant $\lambda\, P$ est pour tenir compte que c'est une force de compression, on suppose donc $-\lambda\, P \leq 0$.

ⓑ Matériaux élastique en flexion donne l'énergie de flexion :

$$w = \int_0^\ell E\, I\, \frac{d\theta^2}{ds_0}\, ds_0$$

$\chi = \dfrac{d\theta}{ds_0}$ variation de courbure (pas d'allongement et $\chi_0 = 0$ dans ce cas).

$$\Pi = W - \mathcal{T}$$

ⓒ θ petit

$$cos\,\theta - 1 \simeq -\frac{\theta^2}{2} \qquad sin\,\theta \simeq \theta$$

$$u(\ell) = \int_0^\ell \frac{\theta^2}{2}\, ds_0 \qquad w(\ell) = \int_0^\ell \theta\, ds_0$$

$$\mathcal{T}_q \simeq \lambda\, P \int_0^\ell \frac{\theta^2}{2}\, ds_0 + \lambda\, F \int_0^\ell \theta\, ds_0$$

théorie linéaire : on néglige $\lambda\, \theta^2$ $\qquad \mathcal{T}_\ell \simeq \lambda\, F \int_0^\ell \theta\, ds_0$

$$\Pi_q = W - \mathcal{T}_q \qquad \Pi_\ell = W - \mathcal{T}_\ell$$

ⓓ $w'(s_0) = sin\,\theta \qquad \theta(s_0) \simeq w'(s_0)$

$$\begin{aligned} \text{et}\ \Pi_q &= \int_0^\ell \frac{E\, I}{2}\, w''^2(s_0) + \lambda\, P\, u(\ell) - \lambda\, F\, w(\ell) \\ \Pi_\ell &= \int_0^\ell \frac{E\, I\, w''^2}{2} - \lambda\, F\, w(\ell) \end{aligned}$$

2

ⓐ $\Pi'(\theta,\beta) = \int_0^\ell E\,I\,\theta'\,\beta' \;-\; \lambda\,P \int_0^\ell sin\,\theta\,\beta \;-\; \lambda\,F \int_0^\ell cos\,\theta\,\beta$

$\Pi''(\theta,\beta,\varphi) = \int_0^\ell E\,I\,\varphi'\,\beta' \;-\; \lambda\,P \int_0^\ell cos\,\theta\,\varphi\,\beta + \lambda\,F \int_0^\ell sin\,\theta\,\varphi\,\beta$

ⓑ $\Pi''(0,\beta,\varphi) = \int_0^\ell E\,I\,\varphi'\,\beta' \;-\; \lambda\,P \int_0^\ell \varphi\,\beta$

soit en équations locales pour l'inconnue β :

$$-\int_0^\ell \big(E\,I\,\beta'\big)'\,\varphi \;+\; E\,I\,\varphi\,\beta'|_0^\ell \;-\; \lambda\,P \int_0^\ell \varphi\,\beta \;=\; 0$$

$$\begin{cases} -\,\big(E\,I\,\beta'\big)' \;=\; \lambda\,P\,\beta \\ \\ \beta(0) \;=\; 0 \qquad E\,I\,\beta'(\ell) \;=\; 0 \end{cases}$$

soit $V_2 = \big\{\beta \in H^2(0,\ell)\;\beta(0)\;=\;0\big\}$ et l'opérateur

$A : V_2 \longrightarrow L^2$

$\beta \longmapsto -\,(E\,I\,\beta')' - \lambda\,P\,\beta$

avec l'inégalité de Poincaré dans $V = \big\{\beta \in H^1(0,\ell)\;\beta(0)\;=\;0\big\}$,

$\exists\,\gamma\;>0\;:\;\int_0^\ell E\,I\,\varphi'^2 \;\geq\; \gamma \int_0^\ell \varphi^2$

la forme bilinéaire $\Pi''(0;\beta,\varphi)$ est coercive pour $\lambda\,P < \gamma$; avec le théorème de Lax- Milgram A est inversible de V dans V' ; donc A est inversible de V_2 dans $L^2(0,\ell)$ et donc bicontinu (théorème d'isomorphisme de Banach).

ⓒ Avec le théorème des fonctions implicites l'équation incrémentale a une solution pour λ petit :

$$\frac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,\theta}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,\lambda} \;+\; \frac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,\lambda} \;=\; 0$$

avec $\dfrac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,\theta}$ opérateur associé à $\varphi \longmapsto \Pi''(\theta,\lambda;\beta,\varphi)$.

Comme cet opérateur est inversible, bicontinu pour $\theta = 0$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une solution pour λ petit.

ⓓ Le calcul de sensitivité se justifie pour la même raison $\dfrac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,\theta}$ inversible pour θ petit.

$$\frac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,\theta}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\,I} \;+\; \frac{\partial\,\mathcal{G}}{\partial\,I} \;=\; 0$$

(3) **Equilibre :** $\Pi'(w,\varphi) \;=\; \int_0^\ell E\,I\,w''\varphi'' \;-\; \lambda\,F\,\varphi(\ell) \;=\; 0$

d'où avec $\Delta w \;=\; \dfrac{\partial\,w}{\partial\,I}$

$$\int_0^\ell E\ I\ \Delta w''\ \varphi'' \;+\; \int_0^\ell E\ \delta I\ w''\ \varphi'' \;=\; 0$$

et avec $\varphi = w$ $\qquad \displaystyle\int_0^\ell E\ I\ w''\ \Delta w'' \;+\; \int_0^\ell E\ \Delta I\ w''^2 \;=\; 0$

mais $\lambda\ F\ w(\ell) \;=\; \displaystyle\int_0^\ell E\ I\ w''^2$ donc

$$\begin{aligned} \lambda\ F\ \Delta w(\ell) \quad &= \quad \int_0^\ell E\ \Delta I\ w''^2 \;+\; 2\int_0^\ell E\ I\ w''\ \Delta w'' \\ &= \; -\int_0^\ell E\ \Delta I\ w''^2 \end{aligned}$$

$\Delta w(\ell) \;=\; -\dfrac{1}{\lambda\ F}\displaystyle\int_0^\ell E\ \Delta I\ w''^2$ cette formule est explicite quand on connait w et peut se programmer en en postraitement d'un programme d'éléments finis.