INSTITUT SUPÉRIEUR D'ÉCONOMIE ET DE MANAGEMENT
Université de Nice-Sophia Antipolis

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2010-2011
1ère SESSION - 2ème SEMESTRE

FILIÈRE : AES **Année d'étude :** L1 **Groupes :** A et B

Intitulé précis de la matière : Techniques quantitatives appliquées 2

Durée : 1h30 **Numéro de l'UNITÉ :** 5

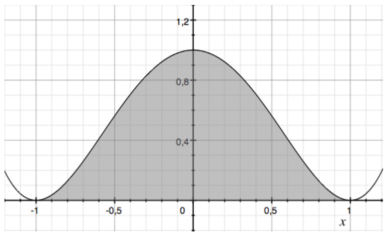
Noms des enseignants responsables : Dehon - Rifford

Type d'épreuve : Écrit **Nombre de sujets à traiter :** Tous les exercices

DOCUMENTS INTERDITS, CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES AUTORISÉES

Les exercices sont indépendants. Vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez à condition de bien séparer la partie analyse (ex. 1-3) de la partie statistique (ex. 4-5). Barème indicatif.

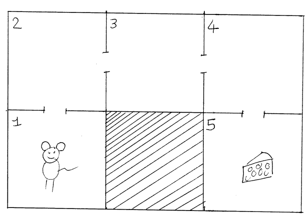
Exercice 1 (2 points) — Pierre achète un terrain délimité dans le plan par le segment $[(-1,0),(1,0)]$ et le graphe de la fonction $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ (voir dessin). Calculer l'aire du terrain.



Exercice 2 (3 points) — Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ -x - 2y - 6z &= 4. \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points) — Une souris se déplace dans un labyrinthe représenté ci-dessous qui comporte 5 compartiments numérotés de 1 à 5.



On suppose qu'elle change de compartiment à chaque instant $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, et que, lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes ($k = 1, 2$ ou 3), elle choisit l'une des portes avec la probabilité $1/k$, ses choix étant indépendants à chaque instant de ceux qu'elle a fait auparavant.

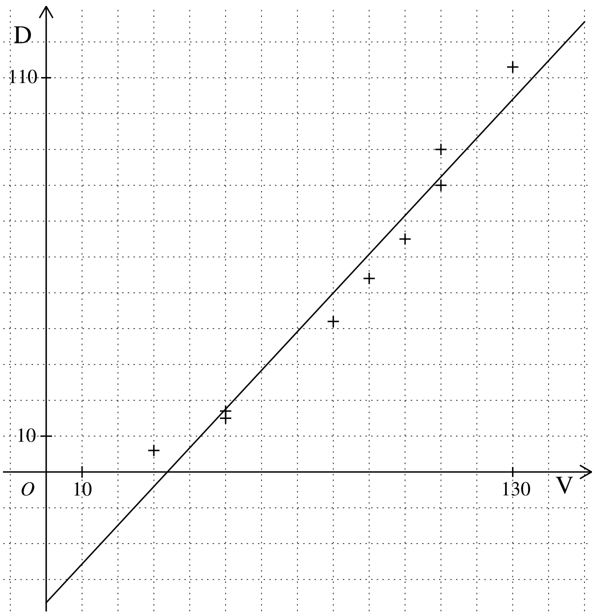
Le cheminement de la souris peut être décrit par une chaine de Markov (X_t) dont les états sont les 5 compartiments et la matrice de transition $\mathbb{P}$, la matrice des probabilités de passage d'un compartiment à l'autre. Par exemple, $p_{2,1} = 1/2$ car le compartiment 2 contient 2 portes dont l'une vers le compartiment 1.

1. Écrire la matrice de transition.
2. Calculer la probabilité du cheminement suivant :

$$(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 5).$$

3. Calculer la probabilité que la souris, partant à l'instant initial du compartiment 1, atteigne le compartiment 5 , en 3 étapes, en 4 étapes, en 5 étapes.

Exercice 4 (7 points) — Un constructeur automobile étudie les distances de freinage d'un véhicule à différentes vitesses. On représente ci-dessous le nuage des points $(V(i), D(i))$ où $V(i)$ est la vitesse (en km/h) avant freinage et $D(i)$ la distance de freinage (en m) lors de la i-ième expérience. On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de points confondus. On représente également la droite de régression associée aux données.



a. Quelle est la taille de la population ? Quelle est l'étendue du caractère V ? et de D ? Quelle est très approximativement la moyenne de V ?

b. Soit E l'évènement "la vitesse est supérieure à 85". Soit F l'évènement "la distance de freinage est supérieure à 60".

Calculer les fréquences des évènements E et F puis la fréquence conditionnelle de F sachant E. L'évènement F est il pratiquement indépendant de E ? Justifier.

c. Le caractère D est il indépendant de V ? Justifiez (plusieurs justifications sont possibles).

d. Que peut on dire du centre du nuage de points par rapport à la droite de régression ? On a calculé la moyenne des distances de freinage et trouvé 53.5 . Que vaut approximativement la moyenne des vitesses ?

e. Quelle est la distance de freinage prédite par la régression linéaire pour $V = 10$? Cette valeur est elle pertinente ?

Exercice 5 (3 points – Détaillez les calculs). — On étudie la longévité des piles au sein de 10 échantillons de 20 piles chacun. On observe la fréquence de l'évènement $E =$ "longévité $\in [70, 75[$" dans chacun des 10 échantillons et on obtient les résultats suivants :

`0.20 0.10 0.10 0.15 0.20 0.20 0.30 0.10 0.30 0.35`

On suppose les échantillons disjoints. On note pour $i = 1, 2, \ldots, 10$ E_i l'évènement "la pile provient de l'échantillon i". Chaque E_i a donc la même fréquence $\frac{1}{10}$.

a. Calculer la fréquence de E dans la réunion des 10 échantillons.

b. Quels sont parmis les évènements $E_1, \ldots, E_{10}$ ceux dont on observe pratiquement l'indépendance avec E ?

c. On tire une pile au hasard au sein des 10 échantillons réunis et on observe que l'évènement E est réalisé. Est-il aussi probable que la pile provienne de l'échantillon 2 que de l'échantillon 9 ? Expliquez par un calcul.

$\mathcal{F}in$