L2 Mass – Théorie des jeux – cours 3 [1]

Extension mixte d'un jeu

Jeux sous forme matricielle : On considère un jeu à deux joueurs à somme nulle, chaque joueur ayant un nombre fini de stratégies. On numérote les stratégies du joueur 1 de 1 à m, celle du joueur 2 de 1 à n. On représente la fonction de paiement du joueur 1 $g : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ par la **matrice de paiement** $(g(i,j))_{i,j}$ à m lignes et n colonnes.

1. Matrice de paiement 2x2

Condition d'existence d'un équilibre

On considère le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Quitte à échanger la colonne 1 avec la colonne 2, ce qui revient à renuméroter les stratégies du joueur 2, on suppose $a \leq c$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que le jeu n'admette pas d'équilibre. Pour cela on inspecte chaque couple de stratégies :

Si le couple de stratégies $(1,1)$ est choisi, le joueur 2 ne regrette pas son choix puisque $a \leq c$. Le joueur 1 regrette son choix, *i.e.* $(1,1)$ n'est pas un équilibre, si et seulement si $a < b$.

Supposons $a < b$. Le couple $(2,1)$ n'est pas un équilibre ssi le joueur 2 regrette son choix donc ssi $b > d$.

Supposons $a, d < b$. Le couple $(2,2)$ n'est pas un équilibre ssi le joueur 1 regrette son choix donc ssi $d < c$. Si cette condition est satisfaite, le couple $(1,2)$ n'est pas un équilibre ssi $a < c$ (le joueur 1 regrette son choix).

En conclusion :

Prop. 1. On suppose $a \leq c$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) le jeu de matrice de paiement $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ n'admet pas d'équilibre.

(ii) $a, d < b, c$.

Exercice : Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le jeu n'admette pas d'équilibre si $a > c$?

Stratégies mixtes pour le joueur 1

On suppose maintenant $a, d < b, c$. Le paiement garanti optimal du joueur 1 est

$$\underline{g} = \max(\min(a,c), \min(b,d)) = \max(a,d) \ .$$

La majoration optimale de la perte du joueur 2 est

$$\bar{g} = \min(\max(a,b), \max(c,d)) = \min(b,c) \ .$$

On a bien sûr $\underline{g} < \bar{g}$ puisque le jeu n'admet pas d'équilibre. Comme déjà vu, si x_0, respectivement y_0, est une stratégie prudente du joueur 1, respectivement du joueur 2, on a $\underline{g} < g(x_0, y_0)$ ou $g(x_0, y_0) < \bar{g}$. (Par exemple si $a > d$ et $b < c$ alors $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\underline{g} = a = g(x_0, y_0) < \bar{g} = b$.) Si $\underline{g} < g(x_0, y_0)$ le joueur 2 regrette son choix ; si $g(x_0, y_0) < \bar{g}$ le joueur 1 regrette son choix. Ceci traduit le fait qu'un couple de stratégies prudentes n'est pas un équilibre (d'ailleurs il n'y a pas d'équilibre).

Nous allons voir qu'en choisissant une stratégie mixte (à définir), le joueur 1 peut se garantir un paiement strictement supérieur à $\underline{g}$, non pas à coup sûr mais en moyenne si le jeu est répété.

Au lieu de choisir l'une de ses deux stratégies, le joueur 1 s'en remet à un générateur de nombres aléatoires qui rend 1 avec probabilité x et 2 avec la probabilité $1 - x$. Le paramètre $x \in [0,1]$ est choisi par le joueur 1.

[1] F.-X. Dehon, 10 octobre – 7 novembre 2008, dehon@unice.fr

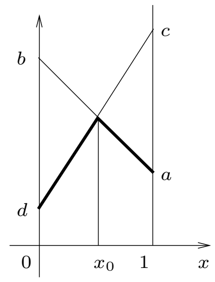
Ex. Si dans un langage de programmation sur ordinateur (par exemple scilab) l'instruction `rand()` produit un nombre décimal entre 0 et 1 avec une probabilité uniforme, alors l'instruction `1+int(rand()+1-x)` produit 1 avec proba x et 2 avec proba $1-x$.

Ex. On lance deux pièces de monnaie de façon répétée jusqu'à obtenir autre chose que (P, P). (Ce procédé s'arrête en un nombre fini d'étapes avec probabilité 1 ; essayez !) Si on obtient (F, F) on attribue la valeur 1 ; si on obtient (F, P) ou (P, F) on attribue la valeur 2. Alors 1 apparaît avec probabilité $\frac{1}{3}$, 2 avec probabilité $\frac{2}{3}$.

Le choix de x par le joueur 1 et d'une stratégie $j \in \{1, 2\}$ par le joueur 2 ne détermine pas le gain du joueur 1 de façon univoque : celui-ci sera $g(1, j)$ avec proba x et $g(2, j)$ avec proba $1-x$ (si $g(1, j) \neq g(2, j)$). Seul est connu d'avance l'**espérance** de gain, ou gain moyen, $xg(1, j) + (1-x)g(2, j)$.

Par stratégie mixte prudente on entend le choix par le joueur 1 d'un paramètre $x \in [0, 1]$ rendant maximal l'espérance de gain garantie $\min_j(xg(1, j) + (1-x)g(2, j)) = \min(xa + (1-x)b, xc + (1-x)d)$.

Voici (en gras) le graphe de l'application $x \mapsto \min(xa + (1-x)b, xc + (1-x)d)$ sur le segment $[0, 1]$:



L'application atteint ici son max en le x_0 vérifiant $x_0 a + (1-x_0)b = x_0 c + (1-x_0)d$ soit $x_0 = \frac{b-d}{b-d+c-a}$. L'espérance de gain garantie optimale est $d + \frac{(c-d)(b-d)}{b-d+c-a}$. On vérifie d'une part que si le joueur 1 choisit x_0 alors son espérance de gain est $d + \frac{(c-d)(b-d)}{b-d+c-a}$ indépendamment du choix de stratégie par le joueur 2, d'autre part que cette espérance de gain est strictement supérieure à $\underline{g}$ (et strictement inférieure à $\bar{g}$). Donc le joueur 1 est gagnant en moyenne par rapport à ce que lui garantit une stratégie pure prudente.

Cependant la stratégie mixte prudente x_0 n'est pas prudente au sens pur : si par exemple $a < d$ et si le joueur 2 choisit la colonne 1 alors le gain du joueur 1 sera $a < \underline{g}$ avec probabilité $x_0 > 0$ (et sera $b > \underline{g}$ avec proba $1 - x_0$).

2. Extension mixte d'un jeu matriciel

Déf. Une **stratégie mixte** pour le joueur 1 est le choix par le joueur 1 d'une variable aléatoire X à valeur dans l'ensemble de ses stratégies $\{1, \ldots, m\}$, indépendante du choix du joueur 2.

Cette définition mérite quelques explications. Disons de X qu'on ne connaît pas a priori sa valeur. On sait seulement $X \in \{1, \ldots, m\}$ et pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$ on connaît la probabilité que X soit égale à i, notée $\mathrm{P}(X = i)$. Que X est indépendante du choix de stratégie du joueur 2 signifie que pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$ et chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$ la probabilité que X soit égal à i sachant que le joueur 2 choisit la stratégie j est égale à $\mathrm{P}(X = i)$.

Les deux seules informations utiles sur X sont : l'indépendance par rapport au joueur 2 et la suite de nombres réels $(p_1, \ldots, p_m) = (\mathrm{P}(X = 1), \ldots, \mathrm{P}(X = m))$, appelée loi de X. Cette suite vérifie

$$\forall i, p_i \geq 0 \text{ et } p_1 + \cdots + p_m = 1 \ .$$

On identifiera (abusivement) la stratégie mixte du joueur 1 avec la suite $(p_1, \ldots, p_m)$.

Rq. S'il existe i_0 tel que $p_{i_0} = 1$ alors les p_i, $i \neq i_0$ sont nuls et la stratégie i_0 est jouée avec probabilité 1. On identifie la stratégie initiale i_0 avec la stratégie mixte $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ avec 1 en position i_0 et on l'appelle **stratégie pure**. Une stratégie pure est une stratégie mixte $(p_1, \ldots, p_m)$ telle que tous les p_i sont nuls sauf l'un d'eux qui vaut forcément 1.

De même une stratégie mixte pour le joueur 2 est une variable aléatoire Y à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$ indépendante du joueur 1 (autrement dit de X), dont on ne retiendra que la loi $(q_1, \ldots, q_n)$. L'indépendance de Y par rapport à X se traduit par

$$\mathrm{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \mathrm{P}(X = i) \times \mathrm{P}(Y = j)$$

pour tout couple (i, j).

Le gain du joueur 1 s'il choisit une stratégie mixte X et si le joueur 2 choisit une stratégie mixte Y est $g(X, Y)$. Sa valeur n'est pas connue d'avance, seule est connue d'avance son espérance

$$\mathrm{E}(g(X,Y)) = \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} g(i,j)p_iq_j \ ,$$

la somme des gains $g(i, j)$ pondérés par la probabilité que $X = i$ et $Y = j$. C'est cette **espérance de gain** que le joueur 1 cherche à optimiser en jouant une stratégie mixte.

Notons $\triangle_m$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ formé des m-uplets $(p_1, \ldots, p_m)$ tels que $p_i \geq 1$ et $\sum_i p_i = 1$. L'ensemble des stratégies mixtes à disposition du joueur 1 (on devrait dire "l'ensemble des lois de stratégie mixte") est $\triangle_m$; celle du joueur 2 est $\triangle_n$.

Déf. On appelle **extension mixte** du jeu $(g(i, j))_{i,j}$ le jeu à deux joueurs à somme nulle dont la fonction de paiement du joueur 1 est

$$G : \triangle_m \times \triangle_n \to \mathbb{R}, \big((p_i), (q_j)\big) \mapsto \sum_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} g(i,j)p_iq_j \ .$$

L'**espérance de gain garantie optimale** du joueur 1 (respectivement la majoration optimale de l'espérance de perte du joueur 2) est le gain garanti optimal du joueur 1 pour le **jeu étendu** G (respectivement ...)

Une **stratégie mixte prudente** pour le joueur 1 ou pour le joueur 2 est une stratégie prudente pour le jeu étendu G.

Existence d'un équilibre

Fixons une stratégie mixte (p_i) du joueur 1. L'application $(q_j) \mapsto G\big((p_i), (q_j)\big)$ est affine : c'est la somme d'une application linéaire en les q_j et d'une constante, ou encore c'est une fonction polynomiale de degré ≤ 1 en les q_j. De même la stratégie mixte (q_j) étant fixé l'application $(p_i) \mapsto G\big((p_i), (q_j)\big)$ est affine. Comme de plus les ensembles de stratégies mixtes $\triangle_m$ et $\triangle_n$ sont des parties convexes fermées bornées de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, les hypothèses du théorème de Sion sont vérifiées, et donc :

Théorème 2. L'extension mixte d'un jeu matriciel admet un équilibre de Nash.

3. Recherche des équilibres de l'extension mixte d'un jeu matriciel

On utilise le résultat qui suit. On appelle coin d'une partie convexe C de $\mathbb{R}^n$ un point M de C qui n'est pas dans l'intérieur d'un segment joignant deux points de C.

Ex. Les coins de l'ensemble $\triangle_n$ sont les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\triangle_n$ dont l'une des coordonnées vaut 1 (les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).
Les coins du disque fermé de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ de rayon 1 sont les points du cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1.
L'intervalle ouvert $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est convexe mais n'a pas de coin.

Prop. 3. Soient C une partie convexe fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$ une application affine ; alors

a. f atteint son sup en un coin de C.

b. L'ensemble des points de C où f est maximale est une partie convexe fermée de C et les coins de cette partie sont des coins de C.

On a bien sûr une proposition analogue en remplaçant "sup" et "maximale" par "inf" et "minimale" (appliquer la proposition à $-f$).

Le point a de la proposition est encore vrai si f est seulement convexe et continue au lieu d'être affine. La première partie du point b (mais pas la seconde) est encore vraie si f est seulement concave et continue au lieu d'être affine.

Un exemple

On considère le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ce jeu n'admet pas de valeur donc n'admet pas d'équilibre. On sait que l'extension mixte du jeu admet un équilibre et que les équilibres sont les couples de stratégies mixtes prudentes.

On cherche d'abord les stratégies mixtes prudentes du joueur 1. Celles-ci s'écrivent $(p, 1-p)$ avec $p \in [0,1]$.

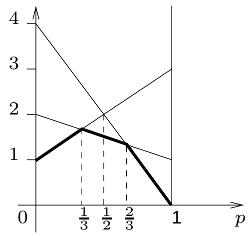
En jouant p, le joueur 1 craint l'espérance de gain

$$\inf_{(q_1,q_2,q_3)\in\triangle_2} G\big((p,1-p),(q_1,q_2,q_3)\big) \ .$$

D'après la proposition 3 l'application $(q_j) \mapsto G\big((p,1-p),(q_j)\big)$ atteint son inf en l'un des coins de $\triangle_2$, c'est à dire en l'une des stratégies pures $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ou $(0,0,1)$. On a

$$\begin{aligned} G\big((p,1-p),(1,0,0)\big) &= 1.p + 2(1-p) \\ G\big((p,1-p),(0,1,0)\big) &= 3p + 1(1-p) \\ G\big((p,1-p),(0,0,1)\big) &= 0.p + 4(1-p) \end{aligned} \quad .$$

Donc $\inf_{(q_j)\in\triangle_2} G\big((p,1-p),(q_j)\big) = \min\big\{p+2(1-p), 3p+1(1-p), 4(1-p)\big\}$. Notons $G_1(p)$ cette fonction de p. G_1 est affine par morceaux et concave (puisqu'elle est le min d'une famille d'applications concaves). En voici le graphe (en gras) sur le segment $[0,1]$:



Une stratégie mixte prudente du joueur 1 est un couple $(p, 1-p)$ tel que $G_1(p)$ est maximal. On cherche d'abord les p tels qu'on ait une égalité $p+2(1-p) = 3p+1(1-p)$ ou $p+2(1-p) = 4(1-p)$ ou $3p+1(1-p) = 4(1-p)$. On trouve pour p : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.

Sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}]$ on a $G_1(p) = 3p + 1(1-p)$. Sur les intervalles $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ et $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ on a $G_1(p) = p + 2(1-p)$. Enfin sur $[\frac{2}{3}, 1]$, $G_1(p) = 4(1-p)$.

G_1 est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{3}]$ puis strictement décroissante sur les intervalles $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ donc elle atteint son maximum en le seul point $\frac{1}{3}$. On peut aussi argumenter que G_1 est affine sur chacun des intervalles (qui sont convexes !) $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$ donc son sup est à chercher parmis l'un des coins de ces intervalles.

Conclusion : $(\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{3})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 1. L'espérance de gain garantie optimale du joueur 1, qui est aussi la valeur du jeu étendu G, est $G_1(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$.

Cherchons maintenant les stratégies mixtes du joueur 2.

1ère méthode :

En jouant $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$ le joueur 2 craint l'espérance de perte

$$\begin{aligned} \sup_{(p,1-p)\in\triangle_1} G\big((p,1-p),(q_1,q_2,1-q_1-q_2)\big) &= \max\big\{G\big((1,0),(q_1,q_2,1-q_1-q_2)\big), \\ &\qquad G\big((0,1),(q_1,q_2,1-q_1-q_2)\big)\big\} \\ &= \max\{q_1+3q_2, 2q_1+q_2+4(1-q_1-q_2)\} \end{aligned}$$

Notons la $G_2(q_1,q_2)$. Une stratégie mixte prudente du joueur 2 est un triplet $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2) \in \triangle_2$ tel que $G_2(q_1,q_2)$ est minimal.

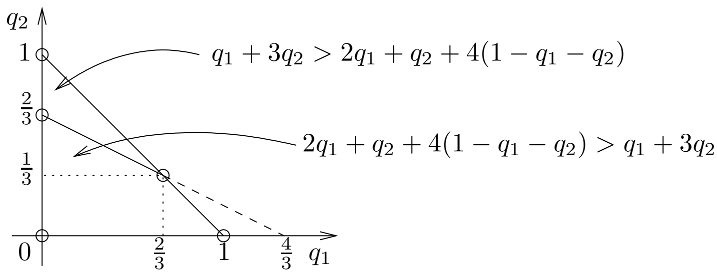
Cherchons les (q_1,q_2) tels que $q_1 + 3q_2 = 2q_1 + q_2 + 4(1-q_1-q_2)$. On obtient le segment de droite d'équation

$$3q_1 + 6q_2 = 4 \ , \ q_1, q_2 \geq 0 \ , \ q_1 + q_2 \leq 1$$

dont les coins sont les points $(q_1,q_2) = (0, \frac{2}{3})$ et $(q_1,q_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (ce dernier est à l'intersection de la droite d'équation $3q_1 + 6q_2 = 4$ avec celle d'équation $q_1 + q_2 = 1$, voir la figure plus loin).

Sur la partie C_1 de $\mathbb{R}^2$ déterminée par les inégalités $q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 \leq 1$ et $3q_1 + 6q_2 \leq 4$ on a $G_2(q_1, q_2) = 2q_1 + q_2 + 4(1 - q_1 - q_2)$. Cette partie est convexe fermée bornée de coins $\{(0,0), (1,0), (0, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$.

Sur la partie C_2 de $\mathbb{R}^2$ déterminée par les inégalités $q_1, q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 \leq 1$ et $3q_1 + 6q_2 \leq 4$ on a $G_2(q_1, q_2) = q_1 + 3q_2$ Cette partie est convexe fermée bornée de coins $\{(0, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0, 1)\}$.



La restriction de G_2 à C_1 est affine donc atteint son min en l'un des coins de C_1. On calcule $G_2(0,0) = \max(0,4) = 4$, $G_2(1,0) = \max(1,2) = 2$, $G_2(0, \frac{2}{3}) = 2$, $G_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$. Donc la restriction de G_2 à C_1 atteint son min en $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et seulement en ce point d'après le point b de la proposition 3.

De même la restriction de G_2 à C_2 atteint son min en l'un des points $(0, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0, 1)$. On a déjà calculé $G_2(0, \frac{2}{3})$ et $G_2(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. On a $G_2(0, 1) = \max(3, 1) = 3$.

Conclusion : G_2 atteint son min en le seul point $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$; $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

2ème méthode en utilisant le fait que $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ *est une stratégie mixte prudente du joueur 1 :*

Une stratégie mixte prudente du joueur 2 est aussi une meilleure réponse à la stratégie $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ du joueur 1 puisqu'un couple de statégies mixtes prudentes est un équilibre de Nash. Si le joueur 1 joue $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et si le joueur 2 joue la stratégie pure 1, respectivement $2, 3$, alors l'espérance de perte du joueur 2 est $\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$,respectivement $3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$.

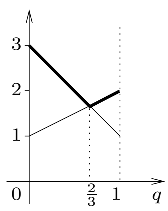
Comme $\frac{8}{3} > \frac{5}{3}$, jouer la stratégie pure 3 n'est pas une bonne réponse. Plus précisément si $q_3 > 0$ la stratégie mixte (q_1, q_2, q_3) du joueur 2 donne l'espérance de perte $(q_1 + q_2)\frac{5}{3} + q_3 \frac{8}{3}$ strictement supérieure à celle donnée par exemple par la stratégie mixte $(q_1 + q_3, q_2, 0)$, qui vaut $\frac{5}{3}$.

Conclusion : si (q_1, q_2, q_3) est une stratégie mixte prudente du joueur 2 alors $q_3 = 0$. On peut donc écrire les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 sous la forme $(q, 1 - q, 0)$, $q \in [0, 1]$.

En jouant $(q, 1 - q, 0)$ le joueur 2 craint l'espérance de perte

$$\max\Big\{G\big((1,0), (q, 1-q, 0)\big), G\big((0,1), (q, 1-q, 0)\big)\Big\} = \max\big\{q + 3(1-q), 2q + 1 - q\big\} .$$

On cherche $q \in [0, 1]$ tel que $\max(q + 3(1 - q), 2q + 1 - q)$ est minimal. La méthode est la même que pour la recherche des stratégies mixtes prudentes du joueur 1 : On cherche d'abord q tel que $q + 3(1 - q) = 2q + 1 - q$. On trouve $q = \frac{2}{3}$. L'expression $\max(q + 3(1 - q), 2q + 1 - q)$ vaut $q + 3(1 - q)$ sur le segment $[0, \frac{2}{3}]$ et $2q + 1 - q$ sur $[\frac{2}{3}, 1]$ donc le min est atteint en $q = \frac{2}{3}$.



Conclusion $(\frac{2}{3}, 1 - \frac{2}{3}, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

4. Elimination des stratégies dominées

Notons e_{i_0} la stratégie mixte (pure) $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ du joueur 1, avec 1 en position i_0. Elle s'identifie avec la stratégie i_0 du joueur 1 pour le jeu matriciel initial $(g(i, j))$.

La stratégie pure e_{i_0} du joueur 1 est dominée, respectivement strictement dominée, pour le jeu étendu s'il existe une stratégie mixte $(p_1, \ldots, p_m)$ du joueur 1 avec $p_{i_0} = 0$ telle que pour toute stratégie mixte (q_j) du joueur 2 $G(e_{i_0}, (q_j)) \leq G((p_i), (q_j))$, respectivement $G(e_{i_0}, (q_j)) < G((p_i), (q_j))$, ce qui équivaut à

$$g(i_0, j) \leq p_1 g(1, j) + \cdot + p_m g(m, j) \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, n\} ,$$

respectivement

$$g(i_0, j) < p_1 g(1, j) + \cdot + p_m g(m, j) \text{ pour tout } j \in \{1, \ldots, n\} .$$

Prop. 4. Supposons que la stratégie pure i_0 du joueur 1 est dominée (au sens large) alors :

a. Les stratégies mixtes prudentes du joueur 2 pour le jeu matriciel obtenu en supprimant la ligne i_0 du jeu initial sont les mêmes que celles pour le jeu initial.

b. Si la stratégie pure i_0 du joueur 1 est strictement dominée pour l'extension mixte du jeu alors toute stratégie mixte prudente (p_i) du joueur 1 vérifie $p_{i_0} = 0$.

c. Si $(p_1, \ldots, p_{m-1})$ est une stratégie mixte prudente du joueur 1 pour le jeu matriciel obtenu en supprimant la ligne i_0 alors la stratégie mixte $(p_1, \ldots, p_{i_0-1}, 0, p_{i_0}, \ldots, p_{m-1})$ obtenue en insérant 0 en position i_0 est prudente pour le jeu initial.

Les deux énoncés ci-dessus admettent des analogues concernant les stratégies dominées du joueur 2 pour l'extension mixte du jeu (appliquer les deux propositions au jeu dont la matrice de paiement est l'opposé de la transposée de $(g(i, j))$).

La découverte de stratégies pures dominées permet de fixer certaines valeurs des p_i et des q_j à 0 donc de diminuer la complexité algorithmique dans la recherche des stratégies mixtes prudentes.

Un deuxième exemple

On considère le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ce jeu n'a pas d'équilibre en stratégie pure puisqu'on a $2 = \underline{g} < \bar{g} = 4$.

La stratégie 3 du joueur 1 est dominée par la stratégie 2. Regardons si la stratégie 4 est dominée par une combinaison barycentrique des stratégies 1 et 2 : La stratégie 4 est dominée par la stratégie mixte $(x, 1-x, 0, 0)$ si on a $(2, 4, 4, 2) \leq x(2, 6, 5, 0) + (1 - x)(4, 2, 3, 8)$. Le réel $x \in [0, 1]$ doit vérifier les inégalités

$$2 \leq 2x + 4(1 - x) \ , \ 4 \leq 6x + 2(1 - x) \ , \ 4 \leq 5x + 3(1 - x) \text{ et } 0 \leq 8(1 - x) \ ,$$

ce qui équivaut à $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Si on prend $x = \frac{2}{3}$ les inégalités sont strictes ce qui prouve que la stratégie 4 est strictement dominée dans l'extension mixte du jeu. On peut vérifier que la stratégie 3 n'est pas strictement dominée.

On cherche un équilibre (en stratégies mixtes) en enlevant les lignes 3 et 4 de la matrice de paiement. Dans le nouveau jeu la stratégie 3 du joueur 2 est maintenant strictement dominée par une combinaison des stratégies 1 et 2. En effet $y\binom{2}{4} + (1 - y)\binom{6}{2} < \binom{5}{3}$ équivaut à $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$; on peut prendre par exemple $y = \frac{1}{3}$.

On peut donc chercher un équilibre en stratégies mixtes du jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} .$$

On reconnaît 2 fois la matrice de paiement traitée en exemple dans la section précedente. Le jeu admet donc les mêmes équilibres (pourquoi ?) : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 1 et $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

En interprétant les stratégies mixtes prudentes trouvées en terme de stratégies mixtes du jeu initial on obtient : $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ est une stratégie mixte prudente du joueur 1 et $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est une stratégie mixte prudente du joueur 2. On en déduit la valeur de l'extension mixte du jeu

$$\underline{G} = \overline{G} = G\big((\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0, 0), (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0)\big) = \tfrac{10}{3} \ .$$

Les stratégies mixtes prudentes obtenues après élimination des stratégies dominées ne sont peut-être pas les seules. Nous cherchons maintenant celles que nous avons peut-être manquées.

Pour le joueur 2 les stratégies 3 et 4 ne sont pas des bonnes réponses à la stratégie mixte prudente $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0)$ du joueur 1 puisqu'elles donnent comme espérance de perte $5 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3} > \bar{G} = \frac{10}{3}$ et $8 \cdot \frac{2}{3} > \bar{G}$ respectivement. On en déduit que si (q_1, q_2, q_3, q_4) est une stratégie mixte prudente du joueur 2 alors $q_3 = q_4 = 0$ puis $(q_1, q_2) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (pourquoi ?). Autrement dit $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est la seule stratégie mixte prudente du joueur 2.

Pour le joueur 1 on sait que si (p_1, p_2, p_3, p_4) est une stratégie mixte prudente alors $p_4 = 0$ puisque la stratégie 4 est strictement dominée. La stratégie 3 est une bonne réponse à la stratégie mixte prudente du joueur 2 donc ne peut être éliminée d'emblée. On est ainsi amené à chercher les triplets (p_1, p_2, p_3) de réels positifs de somme 1 qui maximisent l'espérance de gain garantie

$$\begin{aligned}
\inf_{(q_j) \in \triangle_4} G\big((p_1, p_2, p_3, 0), (q_j)\big) &= \min_{\substack{(q_j) \in \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),\\ (0,0,1,0),(0,0,0,1)\}}} G\big((p_1, p_2, p_3, 0), (q_j)\big) \\
&= \min\Big\{2p_1 + 4p_2 + 4(1 - p_1 - p_2),\ 6p_1 + 2p_2 + 2(1 - p_1 - p_2), \\
&\qquad 5p_1 + 3p_2 + 2(1 - p_1 - p_2),\ 8p_2 + 6(1 - p_1 - p_2)\Big\} \\
&= \min\big\{ -2p_1 + 4,\ 4p_1 + 2,\ 3p_1 + p_2 + 2,\ -6p_1 + 2p_2 + 6\big\}
\end{aligned}$$

Posons $G_1(p_1, p_2) = \min\big(4 - 2p_1,\ 4p_1 + 2, 3p_1 + p_2 + 2,\ -6p_1 + 2p_2 + 6\big)$.

Nous proposons deux méthodes pour trouver les couples (p_1, p_2) où G_1 est maximal. La première est identique à la première méthode de recherche des stratégies mixtes prudentes du joueur 2 dans l'exemple de la section précédente. Elle est fastidieuse. La seconde méthode utilise la valeur de l'extension mixte du jeu obtenue plus haut et est bien plus courte.

1ère méthode :

G_1 est affine par morceaux sur un domaine convexe fermé et borné. On peut chercher les points du domaine en lesquels G_1 est maximal en déterminant d'abord les coins des morceaux sur lesquels G_1 est affine. Les morceaux en question sont donnés par les systèmes d'inégalités

$$(1)\ \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ -2p_1 + 4 \leq 4p_1 + 2 \\ -2p_1 + 4 \leq 3p_1 + p_2 + 2 \\ -2p_1 + 4 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1, p_2) = -2p_1 + 4$;

$$(2)\ \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ 4p_1 + 2 \leq -2p_1 + 4 \\ 4p_1 + 2 \leq 3p_1 + p_2 + 2 \\ 4p_1 + 2 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1, p_2) = 4p_1 + 2$;

$$(3)\ \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq -2p_1 + 4 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq 4p_1 + 2 \\ 3p_1 + p_2 + 2 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{cases}$$

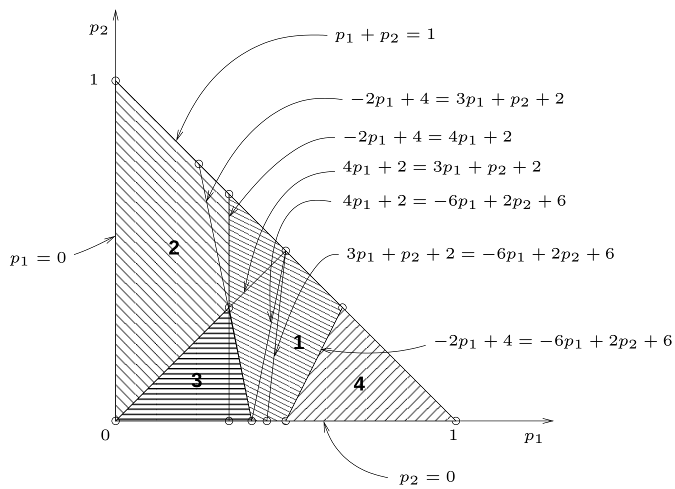
morceau sur lequel $G_1(p_1, p_2) = 3p_1 + p_2 + 2$; enfin

$$(4)\ \begin{cases} p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, p_1 + p_2 \leq 1 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 \leq -2p_1 + 4 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 \leq 4p_1 + 2 \\ -6p_1 + 2p_2 + 6 \leq -6p_1 + 2p_2 + 6 \end{cases}$$

morceau sur lequel $G_1(p_1, p_2) = -6p_1 + 2p_2 + 6$.

Un ou plusieurs des morceaux peut être vide. Les coins des morceaux font partie des points donnés par deux égalités parmis les inégalités ci-dessus. Par exemple les équations $p_1 = 0$ et $p_1 + p_2 = 1$ donnent le coin $(p_1, p_2) = (0, 1)$; les équations $p_1 = 0$ et $4p_1+2 = -2p_1+4$ n'ont pas de solution ; les équations $4p_1+2 = -2p_1+4$ et $4p_1 + 2 = 3p_1 + p_2 + 2$ donnent le coin $(p_1, p_2) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Voici le dessin avec en hachuré les différents morceaux :



On trouve sur le dessin 8 coins. Il faut déterminer ces 8 coins, calculer la valeur de G_1 en ces coins et sélectionner les coins où G_1 est maximal. L'ensemble des points (p_1, p_2) où G_1 est maximal est l'enveloppe convexe des coins sélectionnés. Nous abandonnons la course presque à la ligne d'arrivée...

2ème méthode :

On sait que $\max\limits_{\substack{p_1,p_2 \geq 0 \\ p_1+p_2 \leq 1}} G_1(p_1, p_2) = \underline{G} = \frac{10}{3}$. Si (p_1, p_2) réalise le max de G_1 on a donc

$$-2p_1 + 4 \geq \frac{10}{3}\ ,\ 4p_1 + 2 \geq \frac{10}{3}\ ,\ 3p_1 + p_2 + 2 \geq \frac{10}{3} \text{ et } -6p_1 + 2p_2 + 6 \geq \frac{10}{3}\ ,$$

avec bien sûr les contraintes $p_1, p_2 \geq 0$ et $p_1 + p_2 \leq 1$. Les deux premières inégalités donnent $p_1 = \frac{1}{3}$. En substituant à p_1 sa valeur, les deux inégalités suivantes deviennent équivalentes à $3p_2 \geq 1$. On obtient donc $G_1(p_1, p_2)$ est maximal ssi $p_1 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} \leq p_2 \leq \frac{2}{3}$.

Conclusion : les stratégies mixtes prudentes du joueur 1 sont les quadruplets $(\frac{1}{3}, p, \frac{2}{3} - p, 0)$ avec $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.