Licence L2 MASS - option Théorie des jeux feuille 2 octobre-novembre 2010

Jeux à somme nulle : on représente ci-dessous des jeux à deux joueurs à somme nulle sous forme normale en donnant la matrice de paiement (ou gain) du premier joueur. Un point selle de la fonction de paiement du 1er joueur est un couple de stratégies formant un équilibre du jeu.

1. Soit le jeu de matrice de paiement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

De combien de stratégies disposent les joueurs 1 et 2 ? Quel est le gain du joueur 1 s'il joue la stratégie 2 et si le joueur 2 joue la stratégie 4 ? Quel est le gain du joueur 2 pour ce même choix de stratégies ?

Indiquer pour chaque stratégie du joueur 1 les meilleures réponses du joueur 2 puis pour chacune de ces meilleures réponses les meilleures réponses du joueur 1. Le jeu admet il des équilibres ? Si oui lesquels et quelle est la valeur du jeu ?

2. Pour quelles valeurs de v la stratégie 3 du joueur 1 est-elle prudente ? Pour quelles valeurs de v la stratégie 1 du joueur 2 est-elle prudente ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ v & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer en fonction de v le gain garanti optimal du joueur 1 et la majoration optimale de la perte du joueur 2. Pour quelle valeur de v le jeu admet il une valeur ? Quels sont alors les équilibres ?

3. Pour les jeux suivants indiquer les stratégies prudentes de chaque joueur. Si chacun des joueurs jouent prudemment, regrettent ils a posteriori leur choix ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 3 & 8 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ en fonction de } a.$$

4. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = [1, 2]$, $Y = [1, +\infty[$, $g(x, y) = \frac{x}{y}$.

Quelles sont les stratégies prudentes de chacun des joueurs ? Quelles sont les stratégies strictement dominées ? Le jeu peut il admettre un équilibre ? une valeur ?

Quelles hypothèses du théorème de Sion sont mises en défaut ? Mêmes questions si on prend $X = [1, 2[$ et $Y = [1, 2[$.

On suppose maintenant $X = [0, 1]$, $Y = [1, +\infty[$. Observer que le joueur 1 admet une stratégie strictement dominante. Est-ce également le cas pour le joueur 2 ? Quelles sont les meilleurs réponses du joueur 2 à la stratégie strictement dominante du joueur 1 ? Conclusions en terme d'équilibre ?

5. On considère le jeu à deux joueurs à somme nulle suivant : $X = Y = [0, 1]$, $g(x, y) = x + y - 1$ (paiement du premier joueur). Calculer $\underline{g}$ et $\bar{g}$. Y a t-il un équilibre ?

Même question pour $g(x, y) = 1 - (x - y)^2$ puis pour
$$\begin{aligned} g(x,y) &= 2x - 1 \text{ si } x < y \\ &= 1 - 2y^2 \text{ si } x > y \\ &= x - y^2 \text{ si } x = y \end{aligned}$$

6. Pour chacune des conditions suivantes construire si possible un jeu à somme nulle à deux joueurs, chacun des joueurs ayant 5 stratégies, satisfaisant la condition énoncée.

a) Il n'y a aucun point selle.

b) Il y a exactement un point selle.

c) Il y a exactement deux points selle.

d) Il y a exactement six points selle.

e) Il y a exactement sept points selle.

7. Soit $(X, Y, g : X \times Y \to \mathbb{R})$ un jeu à deux joueurs à somme nulle admettant une valeur. Soit (x, y) un couple de stratégies vérifiant $g(x, y) = \underline{g} = \bar{g}$. Le couple (x, y) est-il nécessairement un équilibre du jeu ?

8. Soient $(X, Y, g : X \times Y \to \mathbb{R})$ un jeu à deux joueurs à somme nulle, $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ des stratégies des joueurs 1 et 2 respectivement. On suppose $\underline{g} = -1$, $\bar{g} = 0$ et $g(x_0, y_0) = 0.5$. Quel(s) joueur(s) regrette son choix ? Expliquer. Même question si $g(x_0, y_0) = -0.5$