Calcul intégral Feuille d'exercices 1

Octobre 97

1. Calculer $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+n})$.

2. Montrer que $\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_{n\geq 1} n^{-n}$.(Développer en série x^{-x})

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{f(x)}{1+nx}dx$..

4. On note ∂ l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$.

   a)Soit $(x,t)\to h(x,t)$ une fonction continue par rapport à t et continûment dérivable par rapport à x. Calculer $\partial\int_0^x h(x,t)dt$.

   b)Soit g une fonction continue sur $\mathbf{R}$, Calculer $\partial^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}g(t)dt$.

   c)Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ et n un entier positif, trouver R telle que:

   $$\partial^{n+1}R = \partial^{n+1}f$$
   $$R(0)=\partial R(0)=...=\partial^n R(0)=0$$

   Ecrire $f=P+R$ où P est un polynôme de degré n tel que:

   $$P(0)=f(0),\partial P(0)=\partial f(0),...,\partial^n P(0)=\partial^n f(0)$$

5. Soit f une fonction continûment dérivable sur $[0,1]$, calculer $\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 f(x)e^{itx}dx$.

6. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, calculer $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{2\varepsilon}\frac{f(x)}{x}dx$.

7. Soit $f(n)=\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1+t^2}dt$ où n est un entier positif. En intégrant par parties montrer que:

   $$f(n)=\sum_{k=1}^{K}\frac{a_k}{n^{2k}}+R_K(n)$$

   où les a_k et $R_K(n)$ s'expriment en fonction des dérivées de $g(t)=\frac{1}{1+t^2}$

8. On note $E(x)=\int_0^x e^{-t^2/2}dt$ et pour $x\in[0,+\infty[$ on pose:

   $$f(x)=\int_0^1\frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}dt$$

   a)Montrer que f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\partial f(x)=-e^{-x}E(\sqrt{2x})/\sqrt{2x}$

   b)Calculer les limites en 0 et en $+\infty$ de f.

   c)En déduire que:

   $$\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}E(t)dt=\pi/4$$

   d)Montrer que ce qui précède permet de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt$

9. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente (intégrer par parties sur $[1,x]$).

---

10. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t^3+t)dt$ est-elle convergente?

11. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T et soit $M = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$.

    a)Montrer que f est la dérivée d'une fonction T-périodique si et seulement si $M = 0$.

    b)Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$ converge si et seulement si $M = 0$.

    c)L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est-elle absolument convergente?

12. On note:
$$f_n(t) = \int_{-n}^{+n} e^{-(x+it)^2/2}dx \text{ et } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+it)^2/2}dx$$

    a)Montrer que les fonctions f_n et f sont bien définies.

    b)Calculer la dérivée de f_n.

    c)Montrer que f est constante.

    d)Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{-itx}dx$.

13. Soit la fonction f définie sur $[0,1]\times[0,1]$ par:
$$f(x,t) = \frac{1}{x}e^{-(Log(t/x))^2} \text{ si } xt \neq 0,\ f(0,t) = 0,\ f(x,0) = 0.$$

    a)Montrer que les applications $x \longrightarrow f(x,t)$ et $t \longrightarrow f(x,t)$ sont continues.

    b)La fonction g définie sur $[0,1]$ par: $g(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$ est elle continue en 0?

14. Soit la fonction f définie sur $[0,1]\times[0,1]$ par:
$$f(x,t) = \frac{x^3}{t^2}e^{-(x^2/t)} \text{ si } t \neq 0,\ f(x,0) = 0.$$

    a)Montrer que les applications $x \longrightarrow \partial_1 f(x,t)$ et $t \longrightarrow \partial_1 f(x,t)$ sont continues.

    b)La fonction g définie sur $[0,1]$ par: $g(x) = \int_0^1 f(x,t)dt$ est elle dérivable en 0?

    c)Est-ce que $g'(0) = \int_0^1 \partial_1 f(0,t)dt$?

15. Soit (p_n) une suite de polynômes telle que: $p_0 = 1, \partial p_n = p_{n-1}$. En faisant des intégrations par parties à l'aide des p_n, montrer que:
$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}[p_k\partial^{k-1}f]_0^1 + (-1)^m \int_0^1 p_m(x)\partial^m f(x)dx$$

    La condition $\int_0^1 p_n(x)dx = 0$ pour tout $n \geq 1$ détermine une unique suite de polunômes p_n.

    Définition: On appelle polynômes de Bernoulli les polynomes $B_n(x) = n!p_n(x)$ et nombres de Bernoulli les $B_n = B_n(0)$.

    Montrer que:
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) + \sum_{k=2}^{M}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_0^1 + (-1)^M \int_0^1 \frac{B_M(x)}{M!}\partial^M f(x)dx$$