Calcul intégral Feuille d'exercices 2

Octobre 97

1. 1)A partir de la formule obtenue à l'exercice 15 de la feuille 1 ,montrer que si f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout entier positif l :

$$\int_l^{l+1} f(x)dx = \frac{1}{2}(f(l)+f(l+1))+\sum_{k=2}^{M}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_l^{l+1}+(-1)^M\int_l^{l+1}\frac{b_M(x)}{M!}\partial^M f(x)dx$$

où b_M est une fonction que l'on déterminera.

En déduire que:

$$\begin{aligned}\int_0^N f(x)dx &= \frac{1}{2}(f(0)+f(N))+f(1)+...+f(N-1)+\sum_{k=2}^{M}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}[\partial^{k-1}f]_0^N \\ &\quad +(-1)^M\int_0^N\frac{b_M(x)}{M!}\partial^M f(x)dx\end{aligned}$$

Appliquer ceci avec $f(x) = Log(x+1)$ En déduire un équivalent de $N!$ lorsque $N \to +\infty$.

2)Soit g une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle $[a,b]$ et soit N un entier positif posons $h = \frac{b-a}{N}$ et $f(x) = g(a+xh)$.Montrer que

$$\begin{aligned}\textstyle\int_a^b g(t)dt = h(\frac{g(a)}{2}+g(a+h)+...+g(a+(N-1)h)+\frac{g(b)}{2}) \\ +\textstyle\sum_{k=2}^{M}\frac{(-1)^{k-1}B_k}{k!}h^k[\partial^{k-1}g]_a^b+h^M R_M\end{aligned}$$

où on déterminera R_M.

2. Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Montrer que

$$|\int_a^b f(t)dt| = \int_a^b |f(t)|dt$$

si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$.

3. a)Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \chi_{]0,+\infty[}e^{-\frac{1}{x^2}}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

b)En déduire que la fonction $g_{a,b}$ $(a<b)$ définie par $g_{a,b}(x) = f(x-a)f(b-x)$ est C^∞ à support dans $[a,b]$ (indéfiniment dérivable et nulle en dehors de $[a,b]$).

c)Que dire de la fonction $h_{a,b}$ définie par $h_{a,b}(x) = \frac{\int_a^x g_{a,b}(t)dt}{\int_a^b g_{a,b}(t)dt}$?

d)Soit $\varepsilon > 0$, et $\alpha < \beta$, construire une fonction $\phi_{\alpha,\beta}$ telle que $0 \leq \phi_{\alpha,\beta} \leq 1$, qui est C^∞ à support dans $[\alpha-\varepsilon,\beta+\varepsilon]$ et égale à 1 sur $[\alpha,\beta]$

4. Soit F la fonction définie sur [-1,+1] par: $F(x) = x^2\sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

a)Montrer que F est dérivable sur [-1,+1]. On pose $F' = f$.

b)L'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est-elle une intégrale impropre convergente?

5. a)Soit f une fonction continue sur [a,b], positive sur [a,b], et g une fonction continue sur [a,b]. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(\theta)\int_a^b f(t)dt \text{ ....(première formule de la moyenne)}$$

b)Soit f une fonction continûment dérivable sur [a,b],positive décroissante sur [a,b], et g une fonction continue sur [a,b]. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que:

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^\theta g(t)dt \text{ ....(deuxième formule de la moyenne)}$$

(utiliser G la primitive primitive de g nulle en a et faire une intégration par parties)

c)Montrer que si $0 < x < y$ on a: $|\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}dt| \leq \frac{2}{x}$

6. La dérivée de la fonction $x \to x^2\sin(1/x^2)$ est-elle intégrable sur [0,1]?

7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Montrer que f' est mesurable. Est-ce que f' est continue?

8. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}Log(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n Log(x)dx$

9. Peut-on appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par: $f_n(x) = \chi_{[0,n]}\frac{x^n}{n^n}$?

10. Soit f la fonction définie sur [0,1] par: $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ si $x \neq 0, f(0) = 0$ ([a]=partie entière de a)

Montrer que f est intégrable sur [0,1] et calculer $\int_{]0,1[} f(x)dx$.

11. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (\sin(\pi x))^n dx$.

12. La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\chi_{[0,n]}$ est-elle intégrable?

13. Est-ce que $\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]} \partial(x^n - x^{n+1})dx = \int_{[0,1]}\sum_{n\geq 1} \partial(x^n - x^{n+1})dx$?

14. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2(|x-\frac{1}{n}|)^{1/2}}$ définit-elle un élément de $L^1([0,1])$?

15. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par: $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixy}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.

16. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\sin(2xy)dy$

17. On considère la fonction ϕ définie sur $[0,+\infty[$ par: $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin(y)}{y}dy$

a)Calculer $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)$

b)Montrer que ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

c)En déduire que pour $x > 0$ on a: $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - Arctg(x)$. Est-ce que f a une limite quand $x \to 0_+$? La fonction ϕ est-elle continue en 0?