Calcul intégral Feuille d'exercices 3

1. Est-ce que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$?

2. Etudier la fonction ϕ définie par: $\phi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{x+y} dy$

3. Soit Γ la fonction définie pour $x > 0$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$. Montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$. Monter que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que $\Gamma(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$, en déduire que ceci permet de définir la fonction Γ sur tout $\mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$

4. Pour quelles valeurs de x a-t'on $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

5. Sur $]0, 1[\times]0, 1[$, on considère la fonction:

$$f(x, y) = 1 + \chi_{\mathbb{Q}}(x) \cos(\pi y)$$

   A-t'on: $\int_{]0,1[} (\int_{]0,1[} f dy)\ dx = \int_{]0,1[} (\int_{]0,1[} f dx)\ dy$? La fonction f est-elle Lebesgue intégrable sur $]0, 1[\times]0, 1[$?

6. Soit f continue sur $\mathbb{R}^2$, a-t'on: $\int_0^1 (\int_0^x f(x, y) dy)\ dx = \int_0^1 (\int_y^1 f(x, y) dx)\ dy$?

7. Sur $]0, 1[\times]0, 1[$, on considère la fonction:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2} \text{ si } x \geq y,\ f(x, y) = -\frac{1}{y^2} \text{ si } x < y$$

   Cette fonction est-elle intégrable?

8. Montrer que $\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{1}{1-xy} dx dy = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

9. Montrer que la fonction $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} \sin(2x_1 x_2)$ est intégrable sur $]0, +\infty[\times]0, 1[$. Appliquer à f le thèorème de Fubini pour en déduire la valeur de l'intégrale: $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{(\sin(x))^2}{x}$

10. Soit $0 < a < b$, calculer $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

11. Calculer la surface d'une ellipse et le volume d'un ellipsoïde.

12. Soit V l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par:

$$V = \{((x_1, x_2) | x_2 > 0, x_1 - x_2 > 0, x_1 x_2 < 1\}$$

   a)Montrer que les équations $\alpha_1 = x_1 x_2$ et $\alpha_2 = x_1 - x_2$ définissent un changement de variables φ que l'on explicitera.

   b)En déduire la valeur de:

$$\int_V \frac{e^{x_2 - x_1}(x_1 + x_2)}{1 + (x_1 x_2)^2} dx_1 dx_2$$

13. Soit $Q(x) = \sum_{i,j} q_{i,j} x_i x_j$ une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$. En diagonalisant Q montrer que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}}$$

14. a)Soit $I(a) = \int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{(i-a)(x^2+y^2)} dxdy$. Calculer $I(a)$ en passant en coordonnées polaires.

    b)Montrer que l'intégrale $J(a) = \int_{]0,+\infty[} e^{(i-a)x^2} dx$ définit une fonction continue de a sur $[0, +\infty[$ et que $J(a)^2 = I(a)$ pour tout $a > 0$.

    c)En déduire les intégrales: $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$.

15. a)Soient $x > 0$ et $y > 0$, montrer qu'il existe une une fonction $B(x, y) > 0$, telle que que pour toute fonction f mesurable positive on a:

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} f((t_1 + t_2) t_1^{x-1} t_2^{y-1} dt_1 dt_2 = B(x, y) \int_0^{+\infty} f(s) s^{x+y-1} ds$$

    (faire le "changement de variables": $t_1 = \alpha_1 \alpha_2$, $t_1 + t_2 = \alpha_2$)

    b)Exprimer B à l'aide de la fonction Γ en étudiant le cas $f(u) = e^{-u}$.

    Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x B(x, n+1)$. En déduire que $\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} n^x \frac{n!}{x(x+1)...(x+n)}$

    c)Soit B_n la boule unité de $\mathbb{R}^n$, montrer qu'une boule de rayon r a pour mesure $r^n \lambda(\mathrm{B}_n)$.

    d)En coupant par les plans $\{x | x_n = t\}$, montrer que:

$$\lambda(B_n) = 2\lambda(B_{n-1}) \int_0^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt$$

    e)En déduire $\lambda(B_n)$.