Exercices 4 Intégration Licence de Mathématiques

1)Soit V l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par:

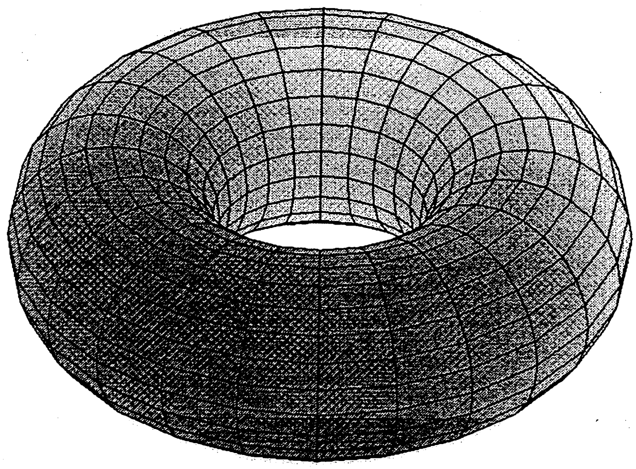
$$V = \{((x_1, x_2)|x_2 > 0, x_1 - x_2 > 0, x_1x_2 < 1\}$$

Les équations $\alpha_1 = x_1x_2$ et $\alpha_2 = x_1 - x_2$ définissent un changement de variables φ que l'on explicitera. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_V \frac{e^{x_2-x_1}(x_1+x_2)}{1+(x_1x_2)^2}dx_1dx_2$$

2) Théorème de Guldin

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^2$ inclus dans un demi-plan $P = \{(r, z)|r > 0\}$ et faisons tourner cet ouvert autour de l'axe des z.



Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad U =]0, 2\pi[\times P \rightarrow \mathbb{R}^3 \backslash P = V \\ &: \quad (\theta, (r, z)) \rightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \end{aligned}$$

Soit $R = \varphi(]0, 2\pi[\times D)$

$$\lambda_3(R) = 2\pi\lambda_2(D)(\frac{1}{\lambda_2(D)}\int_D rdrdz)$$

Le nombre $\frac{1}{\lambda_2(D)}\int_D rdrdz$ est la distance à l'axe des z du barycentre G de D nous la noterons $d(G, 0z)$, on alors

$$\lambda_3(R) = 2\pi\lambda_2(D)d(G, 0z)$$

3)Soit $Q(x) = \sum_{i,j=1}^n q_{i,j}x_ix_j$ (où $x_1, ..., x_n$, sont les composantes de x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire que l'on a

$$Q(x) = (x_1, ..., x_n)M\begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

où M est une matrice symétrique dont les valeurs propres λ_i sont srtictement positives.

On peut diagonaliser la matrice M dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, si $y_1, ..., y_n$ sont les coordonnées de x dans cette base on a $Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$.

La matrice de passage orthogonale P (qui exprime les x_i en fonction des y_i) définit un changement de variable φ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
A l'aide de ce changement de variable vérifier que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)}dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n}}$$

4)Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on définit sur $\mathbb{R}^n$ la fonction $\mathcal{F}f$ (transformé de Fourier de f) par

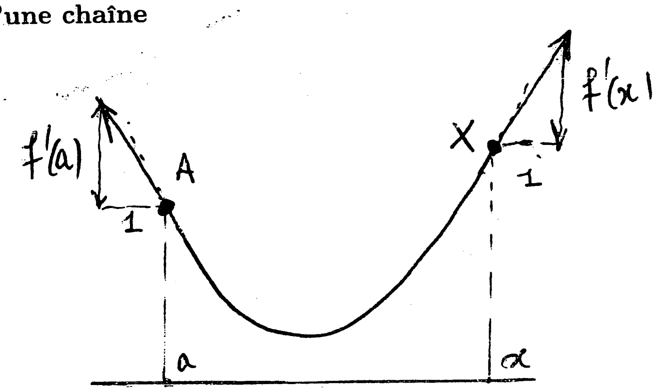
$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi x.\xi} f(x)dx$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $x.\xi$ désigne le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$.
a)Montrer que si A est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même alors

$$\mathcal{F}(f \circ A)(\xi) = \frac{1}{|\det A|}\mathcal{F}(f)({}^tA^{-1}\xi)$$

b)En déduire que si f est radiale ($f(x)$ ne dépend que de $||x||$) alors il en est de même de $\mathcal{F}(f)$.
c)Soit $n = 2$, calculer $\mathcal{F}(\frac{e^{-2\pi||x||}}{||x||})$ (calculer en $\xi = (\rho, 0)$ et utiliser $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+i\rho\cos\theta}d\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2+\rho^2}}$)

5)**La forme d'une chaîne**



Soient A et X deux points de la courbe, la portion de chaîne entre ces deux points subit:
une force verticale d'intensité proprotionnelle à sa longueur
les forces de liaison dont les composantes verticales sont données par $-f'(a)$ et $f'(x)$
a)Montrer que

$$f'(x) - f'(a) = C\int_a^x \sqrt{1+f'(s)^2}ds$$

b)En dérivant par rapport à x montrer que

$$f(x) = \frac{1}{C}ch(Cx + D)$$

7)Calculer le volume et la surface de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < \frac{1}{z^2}, z < -1\}$
8)Calculer le volume et la surface de