**Licence 3ème année calcul Intégral Examen de Janvier 2008**
**Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h.**

**Corrigé détaillé**

1)Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.

a)Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)^2}$

b)Démontrer une formule analogue pour $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1+e^{-ax}}dx$

c)Montrer que la fonction $F : t \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}dx$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et en déduire que

$$F(t) - F(1) = -\int_1^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}dx$$

d) En déduire que si $t \geq 1$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ (on calculera $F(1)$ par un changement de variable et on utilisera que $\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$)

---

1)a)Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. La fonction $x \to \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}$ a une limite finie (égale à $1/a$) en 0 car

$$\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}} = \frac{x(1-bx+O(x^2))}{1-(1-ax+O(x^2))} = \frac{x+O(x^2)}{ax+O(x^2)} = \frac{1+O(x)}{a+O(x)}$$

donc l'intégrale est convergente en 0. La fonction $x \to \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}$est positive sur $]0, +\infty[$ et $\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}} \backsim xe^{-bx}$ quand $x \to +\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} xe^{-bx}dx$ étant convergente, on a convergence de l'intégrale en $+\infty$ par le théorème des équivalents.

Pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)^2}$, on commence par remarquer que si $x \in ]0, +\infty[$ on a $0 < e^{-ax} < 1$ et

$$\frac{1}{1-e^{-ax}} = \sum_{n\geq 0}(e^{-ax})^n$$

donc $\frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}} = \sum_{n\geq 0} xe^{-(b+an)x}$.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1-e^{-ax}}dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} xe^{-(b+an)x}dx$$

Pour permuter $\int_0^{+\infty}$ et $\sum_{n\geq 0}$, on remarque que les fonctions $x \to xe^{-(b+an)x}$ sont positives sur $]0, +\infty[$ et on applique le théorème de permutation sur les fonctions positives, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} xe^{-(b+an)x}dx = \sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} xe^{-(b+an)x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)^2}$$

b)Si $x \in ]0,+\infty[$ on a $0 < e^{-ax} < 1$ et

$$\frac{1}{1+e^{-ax}} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n (e^{-ax})^n$$

donc $\frac{xe^{-bx}}{1+e^{-ax}} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n xe^{-(b+an)x}$.

On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-bx}}{1+e^{-ax}} dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} (-1)^n xe^{-(b+an)x} dx$$

Pour appliquer le théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$ on va vérifier que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} |(-1)^n xe^{-(b+an)x}| dx < +\infty$$

Or

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} |(-1)^n xe^{-(b+an)x}| dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} xe^{-(b+an)x} dx$$

et d'après le a) cette intégrale est égale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(an+b)^2}$ qui est la somme d'une série convergente.

Par le théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$ on a

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n\geq 0} (-1)^n xe^{-(b+an)x} dx = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \int_0^{+\infty} xe^{-(b+an)x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(an+b)^2}$$

c)Montrons que la fonction $F : t \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}} dx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. On va utiliser le théorème de dérivation de Lebesgue pour montrer que $F$ est dérivable sur tout intervalle $]\varepsilon,+\infty[$ où $\varepsilon > 0$. On a

$\star$pour tout $t$ dans $]0,+\infty[$, la fonction $x \to \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $|\frac{-xe^{-tx}}{1+e^{-x}}| \leq e^{-tx}$.

$\star$pour tout $x \in ]0,+\infty[$ , la fonction $t \to \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$\star$pour tout $t$ dans $]\varepsilon,+\infty[$ et tout $x \in ]0,+\infty[$ on a

$$\left|\partial_t\left(\frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}\right)\right| \leq \left|\frac{-xe^{-tx}}{1+e^{-x}}\right| \leq \frac{xe^{-\varepsilon x}}{1+e^{-x}} \leq xe^{-\varepsilon x}$$

et $x \to xe^{-\varepsilon x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et indépendante de $t$.

Donc $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \partial_t\left(\frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-tx}}{1+e^{-x}} dx$$

On remarque par le théorème de continuité de Lebesgue que $F'$ est continue sur $]0,+\infty[$.

D'après le b) (avec $a = 1$ et $b = t$), on a

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{1+e^{-x}}dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+t)^2}dx$$

$$F(t) - F(1) = -\int_1^t F'(x)dx = -\int_1^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}dx$$

d)Pour calculer $F(t)-F(1)$ on va intervertir $\int_1^t$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$ dans $\int_1^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}dx$. Pour appliquer le théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$, il suffit de vérifier que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^t |\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}|dx < +\infty$$

Or si $t \geq 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^t |\frac{(-1)^n}{(n+x)^2}|dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^t \frac{1}{(n+x)^2}dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t-1}{(n+1)^2} < +\infty$$

Donc par le théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$ on a

$$\begin{aligned}
\int_1^t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_1^t \frac{(-1)^n}{(n+x)^2}dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+t}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}
\end{aligned}$$

On a donc

$$F(t) - F(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Or en posant $y = e^{-x}$ on obtient

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,dy = \ln 2$$

Comme $\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ On en déduit que

$$F(t) - \ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t} - \ln 2$$

Donc

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$$

**Remarque.** Le théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$ ne permet pas d'écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+e^{-x}}dx &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(t+n)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(t+n)x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}\end{aligned}$$

car

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n e^{-(t+n)x}\right| dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(t+n)x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1-e^{-x}} dx = +\infty$$

(car $\frac{e^{-tx}}{1-e^{-x}} \geq 0$ et cette dernière intégrale est divergente en 0).

2)Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \int_{]0,+\infty[} e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

a)Montrer que $f$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt$ $(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0)$

b)Soit $g$ la fonction définie pour tout $t \in ]0, +\infty[$ par $g(t) = \int_{D_t} e^{-x^2y^3} \frac{y^{3/2}}{1+y^2} dxdy$ où $D_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, xy < t\}$. En faisant le changement de variables $u = xy$, $v = y$, montrer que $g'(t) = f(t)$.

---

a)Pour montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ on va appliquer le théorème de continuité de Lebesgue. On a

$\star$pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \to e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ car $|e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

$\star$pour tout $x \in ]0, +\infty[$ , la fonction $t \to e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

$\star$pour tout $t$ dans $\mathbb{R}$ et tout $x \in ]0, +\infty[$ on a

$$\left| e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \right| \leq \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

et $x \to \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et indépendante de $t$.

Par le théorème de continuité de Lebesgue, on en déduit la continuité de $f$.

Pour montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ on doit montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| \, dt < +\infty$$

or la fonction $x \to e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est positive sur $]0, +\infty[$ ,donc on a

$$|f(t)| = \left| \int_{]0,+\infty[} e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \right| = \int_{]0,+\infty[} e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = f(t)$$

Il s'agit donc de montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt < +\infty$ c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} (\int_{]0,+\infty[} e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx)dt < +\infty$$

La fonction $(x, t) \to e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ est positive donc par le théorème de Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\int_{]0,+\infty[} e^{-xt^2} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx)dt &= \int_{]0,+\infty[} (\int_{\mathbb{R}} e^{-xt^2} dt) \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \\
&= \int_{]0,+\infty[} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx \\
&= \sqrt{\pi} \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \pi\sqrt{\pi}/2
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \pi\sqrt{\pi}/2$$

b)Soit $g$ la fonction définie pour tout $t \in ]0,+\infty[$ par $g(t) = \int_{D_t} e^{-x^2y^3} \frac{y^{3/2}}{1+y^2} dxdy$ où $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0, xy < t\}$. On a une application

$$\begin{array}{lcl} \varphi & : & D_t \to U_t \\ & : & (x,y) \to (xy, y) \end{array}$$

où $U_t = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u > 0, v > 0, u < t\} = ]0,t[\times]0,+\infty[$

C'est un $\mathrm{C}^1 - difféomorphisme$ de $D_t$ sur $U_t$ car

$\star$ $\varphi$ est $\mathrm{C}^1$ sur $D_t$

$\star$ c'est une bijection dont l'inverse est $\psi : U_t \to D_t$

$$\psi(u,v) = (\frac{u}{v}, v)$$

l'application $\psi$ est $\mathrm{C}^1$ sur $U_t$ et

$$J\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc si $f(x,y) = e^{-x^2y^3} \frac{y^{3/2}}{1+y^2}$ on a par le théorème de changement de variable

$$\begin{array}{ccc} D_t & \stackrel{\psi}{\leftarrow} & U_t \\ f\downarrow & \swarrow & \\ \mathbb{R} & & \end{array}$$

$$\int_{D_t} f(x,y)dxdy = \int_{U_t} (f \circ \psi)(u,v) \det(J\psi(u,v))dudv$$

ce qui donne

$$\int_{D_t} e^{-x^2y^3} \frac{y^{3/2}}{1+y^2} dxdy = \int_{]0,t[\times]0,+\infty[} e^{-u^2v} \frac{v^{1/2}}{1+v^2} dudv$$

Par le théorème de Tonelli on a

$$\begin{aligned} \int_{]0,t[\times]0,+\infty[} e^{-u^2v} \frac{v^{1/2}}{1+v^2} dudv &= \int_{]0,t[} (\int_{]0,+\infty[} e^{-u^2v} \frac{v^{1/2}}{1+v^2} du)dv \\ &= \int_{]0,t[} f(v)dv \end{aligned}$$

Comme $f$ est continue par le $a$), on a

$$g(t) = \int_{]0,t[} f(v)dv = \int_0^t f(v)dv$$

et la fonction $t \to \int_0^t f(v)dv$ est dérivable de dérivée $f$.

3)Calculer le volume de
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 < 4z, 0 < z < 1\}$ et l'aire de
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 4z, 0 < z < 1\}$

On a par découpage horizontal $\lambda_3(D) = \int_0^1 \lambda_2(D_z)dz$ en posant $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 4z\}$, $D_z$ est le disque de centre 0 et de rayon $2\sqrt{z}$, donc

$$\lambda_3(D) = 4 \int_0^1 \pi z dz = 2\pi$$

**Remarque.** On peut aussi calculer le volume en utilisant le théorème de Guldin.

$$\lambda_3(D) = 2\pi \int_E r dr dz$$

où $E = \{(r, z) | r > 0, r^2 < 4z, 0 < z < 1\}$. On a

$$\int_E r dr dz = \int_0^1 (\int_0^{2\sqrt{z}} r dr) dz = \int_0^1 2z dz = 1$$

Pour calculer l'aire de $S$ on va utiliser le paramétrage de $S$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \begin{array}{c} x = 2\sqrt{z}\cos(\theta) \\ y = 2\sqrt{z}\sin(\theta) \\ z = z \end{array}, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 < z < 1\}$$

Le plan vectoriel tangent à $S$ en un point $(x, y, z)$ est engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} -2\sqrt{z}\sin(\theta) \\ 2\sqrt{z}\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{z}}\cos(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{z}}\sin(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a donc un vecteur normal

$$u(\theta, z) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{z}\cos(\theta) \\ 2\sqrt{z}\sin(\theta) \\ -2 \end{pmatrix}$$

La norme euclidienne de ce vecteur est $||u(\theta, z)|| = \sqrt{4z + 4}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \sigma(S) &= \int_{]0,1[\times]0,2\pi[} 2\sqrt{z+1} dz d\theta \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{z+1} dz \\ &= 4\pi \frac{2}{3}[(z+1)^{3/2}]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{3}(\sqrt{8} - 1) \end{aligned}$$