L3 intégration 2008-09

Quelques corrigés d'exercices de TD[1]

1. Feuille 1 ex. 10 : L'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t+t^3)\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Notations : $\mathrm{O}_{t\to t_0}(f(t))$: une fonction qui s'écrit comme le produit de $f(t)$ par une fonction bornée au voisinage de t_0 ;

$\mathrm{o}_{t\to t_0}(f(t))$: une fonction qui s'écrit comme le produit de $f(t)$ par une fonction tendant vers 0 quand t tend vers t_0. On écrit aussi $\mathrm{O}(f(t))$ et $\mathrm{o}(f(t))$ en place de $\mathrm{O}_{t\to t_0}(f(t))$ et $\mathrm{o}_{t\to t_0}(f(t))$ si le contexte est sans ambiguïté.

$\underset{t\to t_0}{\sim}$: équivalent en t_0 ; $f(t)\underset{t\to t_0}{\sim} g(t)$ signifie très exactement $f(t)=g(t)(1+\mathrm{o}(1))$.

On se sert constamment du développement $\frac{1}{1+u}=1-u+\mathrm{o}_{u\to 0}(u)$ en particulier on a $\frac{1}{1+\mathrm{o}(1)}=1+\mathrm{o}(1)$.

Le corrigé donne une méthode très efficace reposant sur l'intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty}\cos(t+t^3)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left[(1+3t^2)\cos(t+t^3)\right]\frac{1}{1+3t^2}\mathrm{d}t=\left[\frac{\sin(t+t^3)}{1+3t^2}\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\sin(t+t^3)\frac{-6t}{(1+3t^2)^2}\mathrm{d}t$$

Le terme $\left[\frac{\sin(t+t^3)}{1+3t^2}\right]_0^{+\infty}$ est à comprendre comme $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin(t+t^3)}{1+3t^2}\right]_0^{x}$ (comme une intégrale impropre). La limite existe et vaut 0.

On a $\left|\sin(t+t^3)\frac{-6t}{(1+3t^2)^2}\right|=\mathrm{O}_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^3})$ donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(t+t^3)\frac{-6t}{(1+3t^2)^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente. On en conclut que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t+t^3)\mathrm{d}t$ est convergente. (Est-elle absolument convergente ? Voir plus bas.)

Nous proposons ci-dessous une méthode reposant sur un changement de variable, plus longue, plus technique, néanmoins instructive.

L'application $t\mapsto t+t^3$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle $[0,+\infty[$ sur lui-même. Notons φ la bijection réciproque. On fait le changement de variable $u=t+t^3$ soit $t=\varphi(u), \mathrm{d}t=\frac{1}{1+3\varphi(u)^2}\mathrm{d}u$.

On a

$$\int_0^x\cos(t+t^3)\mathrm{d}t=\int_0^{x+x^3}\frac{\cos u}{1+3\varphi(u)^2}\mathrm{d}u$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t+t^3)\mathrm{d}t$ converge si $\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{1+3\varphi(u)^2}\mathrm{d}u$ converge (en fait si et seulement si) auquel cas les deux limites sont égales. On est amené à étudier le comportement de $\frac{\cos u}{1+3\varphi(u)^2}$ au voisinage de $+\infty$.

On a $u=x+x^3\underset{x\to+\infty}{\sim}x^3$ donc $x=\varphi(u)\underset{u\to+\infty}{\sim}u^{\frac{1}{3}}$ (voir plus bas) et $\frac{1}{1+3\varphi(u)^2}\underset{u\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{3u^{\frac{2}{3}}}$ en particulier

$$\frac{\cos u}{1+3\varphi(u)^2}=\mathrm{O}_{u\to+\infty}\Big(\frac{|\cos u|}{3u^{\frac{2}{3}}}\Big)$$

Cette estimation est insuffisante : $\int_1^{+\infty}\frac{|\cos u|}{3u^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}u$ ne converge pas. On a besoin d'un développement asymptotique plus fin de $\frac{1}{1+3\varphi(u)^2}$ au voisinage de $+\infty$.

L'application φ vérifie l'équation

$$u=\varphi(u)+\varphi(u)^3\ .$$

Lorsque u tend vers $+\infty$, $\varphi(u)$ tend vers $+\infty$. (En effet $t\mapsto t+t^3$ est continue donc bornée sur tout segment $[0,x]$. Pour que $t+t^3$ soit grand, il faut que t soit grand.) On en déduit

$$\varphi(u)+\varphi(u)^3=\varphi(u)^3+\mathrm{o}_{u\to+\infty}(\varphi(u)^3)=\varphi(u)^3(1+\mathrm{o}(1))$$

donc

$$\varphi(u)=\Big(\frac{u}{1+\mathrm{o}(1)}\Big)^{\frac{1}{3}}=u^{\frac{1}{3}}(1+\mathrm{o}(1))$$

[1]F.X. Dehon, 21 octobre 2008, dehon@unice.fr

ce qui montre $\varphi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} u^{\frac{1}{3}}$.

Ecrivons $\varphi(u) = u^{\frac{1}{3}}(1+\varphi_1(u))$. D'après ce qui précède $\varphi_1(u)$ tend vers 0 quand u tend vers $+\infty$. Reportons dans l'équation vérifiée par φ et divisons par u ; on obtient

$$1 = u^{-\frac{2}{3}}(1+\varphi_1(u)) + (1+\varphi_1(u))^3 \ .$$

On a $u^{-\frac{2}{3}}\varphi_1(u) = \mathrm{o}_{u\to+\infty}(\varphi_1(u))$ et, puisque $\varphi_1(u) = \mathrm{o}_{u\to+\infty}(1)$, $(1+\varphi_1(u))^3 = 1+3\varphi_1(u)+\mathrm{o}_{u\to+\infty}(\varphi_1(u))$ de sorte qu'on obtient

$$0 = u^{-\frac{2}{3}} + 3\varphi_1(u) + \mathrm{o}_{u\to+\infty}(\varphi_1(u)) = u^{-\frac{2}{3}} + 3\varphi_1(u)(1+\mathrm{o}(1))$$

donc

$$\varphi_1(u) = -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{1+\mathrm{o}(1)} = -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}} + \mathrm{o}(u^{-\frac{2}{3}})$$

On veut un développement asymptotique de $\frac{1}{1+3\varphi(u)^2}$. On a

$$\begin{aligned}
1+3\varphi(u)^2 &= 1+3u^{\frac{2}{3}}(1+\varphi_1(u))^2 \\
&= 1+3u^{\frac{2}{3}}\left(1-\tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}+\mathrm{o}(u^{-\frac{2}{3}})\right)^2 \\
&= -1+3u^{\frac{2}{3}}+\mathrm{o}(1) \\
&= 3u^{\frac{2}{3}}\left(1-\tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}+\mathrm{o}(u^{-\frac{2}{3}})\right)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{1+3\varphi(u)^2} &= \tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}\left(1+\tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}+\mathrm{o}(u^{-\frac{2}{3}})\right) \\
&= \tfrac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}+\tfrac{1}{9}u^{-\frac{4}{3}}+\mathrm{o}(u^{-\frac{4}{3}})
\end{aligned}$$

En particulier

$$\frac{\cos u}{(1+3\varphi(u))^2} = \frac{\cos u}{3u^{\frac{2}{3}}} + \mathrm{O}(u^{-\frac{4}{3}})$$

Posons $f(u) = \frac{\cos u}{(1+3\varphi(u))^2} - \frac{\cos u}{3u^{\frac{2}{3}}}$. L'application f est continue sur $]0,+\infty[$ (elle n'est pas continue en 0) et est un $\mathrm{O}_{u\to+\infty}(u^{-\frac{4}{3}})$ donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ converge absolument. (Noter que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{d}u$ est divergente.)

L'intégrale $\int_1^{+\infty}(\cos u)u^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}u$ est convergente (faire une intégration par parties comme dans l'exercice 9). On en déduit que $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{(1+3\varphi(u))^2}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty}\frac{1}{3}(\cos u)u^{-\frac{2}{3}} + f(u)\mathrm{d}u$ est convergente. Comme $u \mapsto \frac{\cos u}{(1+3\varphi(u))^2}$ est continu sur $[0,1]$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\cos u}{(1+3\varphi(u))^2}\mathrm{d}u$ est également convergente.

Convergence absolue : Si l'intégrale $\int_0^{+\infty}\cos(t+t^3)\mathrm{d}t$ était absolument convergente, l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos u}{1+3\varphi(u)^2}\mathrm{d}u$ le serait également et par différence $\int_1^{+\infty}\frac{1}{3}(\cos u)u^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}u$ serait absolument convergente, ce qui n'est pas (cf. cours).