Licence 3ème année. Calcul intégral. Examen de Décembre 2007.Documents et calculatrices non autorisés. Durée 3h.

1)**4 points)** Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(n+1)^{n+1}}$ où les a_n sont des entiers que l'on déterminera (on utilisera que $xe^{-x} \leq 1/e$ pour tout $x > 0$).

2)**6 points)** Soit $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \ln(x) dx$.

a)Montrer que la fonction φ est définie et dérivable pour tout $t \in]0, +\infty[$.

b)Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$ où a et b sont des fonctions que l'on déterminera. En déduire que $\varphi(t) = \frac{\varphi(1)}{t} + \psi(t)$ où ψ est une fonction que l'on déterminera.

3)**6 points)**On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0$

a)Soit $A > 0$.Montrer que le fonction $(x, y) \to e^{-xy^2} \sin(x)$ est intégrable sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \sin(x) dx dy = C \int_0^A \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$$

où C est une constante que l'on déterminera.

b)Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} dy$

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4} dt = C \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx$

4)**4 points)** Soit n est un entier ≥ 0.
a)Calculer

$$\int_{]0,+\infty[}(\int_{]\alpha,+\infty[} e^{-t}t^n dt)d\alpha$$

b)Calculer $\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy$ (on posera $u = x$ et $v = x+y$).

Licence 3ème année Mesure et Probabilités. Examen de Décembre 2007. Documents et calculatrices non autorisés. Durée 3h.

Corrigé

1)**4 points)**Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x+e^x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{(n+1)^{n+1}}$ où les a_n sont des entiers que l'on déterminera (on utilisera que $xe^{-x} \leq 1/e$ pour tout $x > 0$).

On a $\frac{1}{x+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+xe^{-x}}$. La fonction $x- > xe^{-x}$ définie sur $]0+\infty[$ est majorée par $1/e < 1$, on peut donc écrire

$$\frac{e^{-x}}{1+xe^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n e^{-(n+1)x}$$

Pour permuter les signes $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$ on vérifie que $\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)x}dx$ est finie:

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-xe^{-x}}dx < \frac{1}{1-1/e}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$$

car $1 - xe^{-x} > 1 - 1/e$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-xe^{-x}}dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} x^n e^{-(n+1)x}dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

2)**6 points)** Pour tout $t > 0$ on pose $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\ln(x)dx$.

a)Montrer que la fonction φ est dérivable pour tout $t \in]0, +\infty[$.

b)Montrer que pour tout $t > 0$ on a $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$ où a et b sont des fonctions que l'on déterminera. En déduire que $\varphi(t) = \frac{\varphi(1)}{t} + \psi(t)$ où ψ est une fonction que l'on déterminera.

a)Soit $f(t, x) = e^{-tx}\ln(x)$ on a $\partial_t f(t, x) = -e^{-tx}x\ln(x)$ et on a pour tout $t \geq a > 0$

$$| - e^{-tx}x\ln(x)| \leq e^{-ax}x|\ln(x)|$$

La fonction $x- > e^{-ax}x|\ln(x)|$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (il n'y a pas de problème en 0 et en $+\infty$ on a $e^{-ax}x|\ln(x)| \leq e^{-ax}e^{ax/2} = e^{-ax/2}$). D'après le théorème de dérivation de Lebesgue on en déduit que la fonction φ est dérivable sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et

$$\varphi'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}x\ln(x)dx =$$

b)On a en intégrant par parties

$$\varphi'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{-t}(\ln(x)+1)dx=-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}e^{-tx}\ln(x)dx-\frac{1}{t}\int_0^{+\infty}e^{-tx}dx=-\frac{1}{t}\varphi(t)-\frac{1}{t^2}$$

La résolution de l'équation différentielle $\varphi'(t)=-\frac{1}{t}\varphi(t)-\frac{1}{t^2}$ donne

$$\varphi(t)=\frac{-\ln(t)+Cte}{t}$$

et on a immédiatement $\varphi(1)=\frac{-\ln(1)+Cte}{1}=Cte.$

3)**6 points)**On rappelle que $\int_{\mathbb{R}}e^{-at^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a>0$

a)Soit $A>0$.Montrer que la fonction $(x,y)\to e^{-xy^2}\sin(x)$ est intégrable sur $]0,A[\times]0,+\infty[$ et que

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[}e^{-xy^2}\sin(x)dxdy=C\int_0^A\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$$

où C est une constante que l'on déterminera.

b)Calculer $\lim_{A\to+\infty}\int_{]0,+\infty[}\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}dy$

En déduire que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}dt=C\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$

On a

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[}|e^{-xy^2}\sin(x)|dxdy\leq\int_{]0,A[\times]0,+\infty[}e^{-xy^2}dxdy$$

et par le théorème de Tonelli

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[}e^{-xy^2}dxdy=\int_{]0,A[}(\int_{]0,+\infty[}e^{-xy^2}dy)dx=\int_{]0,A[}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}dx<+\infty$$

Par le théorème de Fubini on a

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[}e^{-xy^2}\sin(x)dxdy=\int_{]0,A[}(\int_{]0,+\infty[}e^{-xy^2}dy)\sin(x)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_{]0,A[}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$$

b)On a $\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}=0$ et

$$|\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}|\leq e^{-Ay^2}|\frac{1}{y^2-i}|\leq\frac{1}{\sqrt{y^4+1}}$$

La fonction $y\to\frac{1}{\sqrt{y^4+1}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc par le théorème de la convergence dominée on a $\lim_{A\to+\infty}\int_{]0,+\infty[}\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}dy=\int_{]0,+\infty[}lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}dy=0$

D'autre part

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2}\sin(x)dxdy = \int_{]0,+\infty[}(\int_{]0,A[} e^{-xy^2}\sin(x)dx)dy$$

Or $\int_0^A e^{-xy^2}\sin(x)dx = \operatorname{Im}\int_0^A e^{-x(y^2-i)}dx = \operatorname{Im}\frac{1}{y^2-i}(1-e^{-A(y^2-i)}) = \frac{1}{1+y^4} - \operatorname{Im}(\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i})$

Donc

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2}\sin(x)dxdy = \int_{]0,+\infty[}\frac{1}{1+y^4}dy - \int_{]0,+\infty[} -\operatorname{Im}(\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i})dy$$

En passant à la limite quand $A \to +\infty$ on a

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_{]0,A[}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_{]0,+\infty[}\frac{1}{1+y^4}dy$$

4)**4 points)** Soit n est un entier ≥ 0.

a)Calculer

$$\int_{]0,+\infty[}(\int_{]\alpha,+\infty[} e^{-t}t^n dt)d\alpha$$

b)Calculer $\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy$ (on posera $u = x$ et $v = x+y$)

a)On a $\int_{]\alpha,+\infty[} e^{-t}t^n dt = \int_{]0,+\infty[}\chi_{]\alpha,+\infty[}(t)e^{-t}t^n dt$, et $\chi_{]\alpha,+\infty[}(t) = \chi_{]0,t[}(\alpha)$ et par le théorème de Tonelli

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[}\int_{]0,+\infty[}\chi_{]\alpha,+\infty[}(t)e^{-t}t^n dtd\alpha &= \int_{]0,+\infty[}\int_{]0,+\infty[}\chi_{]0,t[}(\alpha)e^{-t}t^n dtd\alpha \\ &= \int_{]0,+\infty[}(\int_{]0,t[}\chi_{]0,t[}(\alpha)d\alpha)e^{-t}t^n dt \\ &= \int_{]0,+\infty[} te^{-t}t^n dt = (n+1)!\end{aligned}$$

b)On a $u = x$ et $v = x+y \Leftrightarrow x = u$ et $y = v-u$.

Soit $U = \{(u,v)$ tels que $u > 0$ et $v > u\}$. L'application $\varphi : U \to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}\varphi \quad &: \quad U \to]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\ &: \quad (u,v) \to (u, v-u)\end{aligned}$$

est un $\mathrm{C}^1 - \textit{difféomorphisme}$ et $\det J\varphi = 1$. Par le théorème de changement de variable on a

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy = \int_U e^{-v}v^n dxdy = \int_{]0,+\infty[}(\int_{]u,+\infty[} e^{-v}v^n dv)du = (n+1)!$$

Licence 3ème année Calcul intégral 2ème session . Documents et calculatrices non autorisés. Durée 3h

1)**4 points)**a)Montrer que $\int_0^1 x^{2n}\ln(x)dx = \frac{C}{(2n+1)^2}$ pour tout entier $n \geq 0$, où C est une constante que l'on déterminera.

b)Montrer que $\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx = D\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, où D est une constante que l'on déterminera.

2)**6 points)** a)Soit $x \in]0,1[$, calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_0^A (\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y})dy$. En déduire la valeur de $\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2y}\frac{1}{1+y}dy$

b)Calculer $\int_{]0,+\infty[}(\int_{]0,1[} \frac{1}{1+x^2y}\frac{1}{1+y}dx)dy$. En déduire la valeur de $\int_{]0,1[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ (on utilisera l'identité $\partial(Arctg(\sqrt{y})) = \frac{1}{1+y}\frac{1}{2\sqrt{y}}$)

3)**6 points)** Soit la fonction φ est définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{1-\cos(x)}{x}dx$
.

a)Montrer que la fonction φ est dérivable pour tout $t \in]0,+\infty[$.

b)Calculer $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$. En déduire que $\varphi(t) = \ln(f(t))$ où f est une fonction que l'on déterminera.

4)**4 points)**Soit $D = \{(x, y)$ tels que $x > 0, y > 0, y < x$ et $x + y < 1\}$

a)Montrer que $\psi : D \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x, y) = (u, v)$ où $u = x+y, v = x-y$, est un $C^1 - difféomorphisme$ entre D et un ouvert U que l'on déterminera.

b)Calculer $\int_D \frac{1}{\sqrt{x-y}} dxdy$