Licence 3ème année. Calcul Intégral. Examen de Décembre 2008
Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h

1)**10 points.**

a)2 points Montrer que l'intégrale $h(t)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}(1-e^{-x^2t})dx$ est convergente pour tout réel $t\geq 0$.

b)3 points Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $h'(t)$.

c)2 points Montrer par un changement de variable que $h(t)=h(1)\sqrt{t}$ pour tout $t>0$. En déduire $h(t)$ pour tout $t\geq 0$. (On rappelle que $\int_0^{+\infty}e^{-at^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a>0$)

d)3 points Montrer que pour tout $A>0$ on a $\int_0^A\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx=\sum_{n\geq 1}c_nA^{2n-1}$
où les c_n sont des coefficients que l'on déterminera. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{(2n-1)n!}$

2)**10 points**

a)**3 points** Soit $D = \{(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,1[| x < y(1-y)\}$. Montrer que $\varphi : (x,y) \to (u = \frac{x}{y(1-y)}, v = y)$ est un C^1-difféomorphisme de D sur un ouvert U que l'on déterminera.

b)**3 points** Calculer $\int_D xdxdy$.

c)**2 points** Calculer le volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 < z^2(1-z)^2$ et $z \in]0,1[\}$

d)**2 points** Soit la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 = z^2(1-z)^2$ et $z \in]0,1[\}$. Donner un paramétrage de S à l'aide de $t \in]0,2\pi[$ et $z \in]0,1[$ et calculer l'aire de S (on utilisera

$\int_0^1 z\left(1-z\right)\sqrt{1+\left(1-2z\right)^2}dz = \frac{1}{32}(\sqrt{2} - 5\ln\left(\sqrt{2}-1\right))$

Licence 3ème année. Calcul Intégral. Examen de Décembre 2008
Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h

Corrigé

1)**10 points.**

a)2 points Montrer que l'intégrale $h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x^2 t})dx$ est convergente pour tout réel $t \geq 0$.

b)3 points Montrer que la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(t)$.

c)2 points Montrer par un changement de variable que $h(t) = h(1)\sqrt{t}$ pour tout $t > 0$. En déduire $h(t)$ pour tout $t \geq 0$. (On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0$)

d)3 points Montrer que pour tout $A > 0$ on a $\int_0^A \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx = \sum_{n\geq 1} c_n A^{2n-1}$ où les c_n sont des coefficients que l'on déterminera. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-t)^n}{(2n-1)n!}$

a)Pour $t = 0$ on a $1 - e^{-x^2 t} = 0$ donc $h(0) = 0$. Pour tout réel $t > 0$, on a $\frac{1-e^{-x^2 t}}{x^2} \to t$ quand $x \to 0$, ce qui prouve qu'il y a convergence de l'intégrale en 0. Pour tout réel $t > 0$, la fonction $x \to \frac{1-e^{-x^2 t}}{x^2}$ est positive et $\frac{1-e^{-x^2 t}}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ce qui prouve que $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x^2 t}}{x^2}$ est convergente par le théorème de comparaison.

b)Soit $f(t, x) = \frac{1-e^{-x^2 t}}{x^2}$, la fonction $t \to f(t, x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a $\partial_t f(t, x) = e^{-x^2 t}$ et pour tout $t \geq a > 0$ on a $|e^{-x^2 t}| \leq e^{-ax^2}$. La fonction $x- > e^{-ax^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. D'après le théorème de dérivation de Lebesgue on en déduit que la fonction h est dérivable sur $]a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et

$$h'(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2 t}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

Donc $h(t) = \sqrt{\pi t} + C$.

c)Par le changement de variable $u = x\sqrt{t}$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2 t}}{x^2}dx = \sqrt{t}\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2}\,du$$

donc pour tout $\sqrt{\pi t} + C = h(1)\sqrt{t}$ en prenant la limite quand $t \to 0$ on a $C = 0$, donc $h(t) = \sqrt{\pi t}$.

d)On a $\frac{1-e^{-x^2}}{x^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{n!}$ et

$$\sum_{n\geq 1}\int_0^A |\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{n!}|dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^A \frac{x^{2(n-1)}}{n!}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{A^{2n-1}}{(2n-1)n!}$$

cette dernière série est convergente car $\frac{A^{2n-1}}{(2n-1)n!} \leq \frac{1}{A}\frac{(A^2)^n}{n!}$. On a par le théorème de permutation entre série et intégrale

$$\int_0^A \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{n!}dx = \sum_{n\geq 1}\int_0^A \frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{n!}dx = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}A^{2n-1}}{(2n-1)n!}$$

Donc $\int_0^A \frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx = \frac{1}{A}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}A^{2n}}{(2n-1)n!}$. Ce qui donne, en posant $t = A^2$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{(2n-1)n!} = \sqrt{t}\int_0^{\sqrt{t}}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}dx \backsim \sqrt{\pi t}$$

Conclusion. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}t^n}{(2n-1)n!} \backsim \sqrt{\pi t}$ en $+\infty$ donc $\sum_{n\geq 1}\frac{(-t)^n}{(2n-1)n!} \backsim -\sqrt{\pi t}$ en $+\infty$.

2)**10 points**

a)**3 points** Soit $D = \{(x,y) \in]0,+\infty[\times]0,1[| x < y(1-y)\}$. Montrer que $\varphi : (x,y) \to (u = \frac{x}{y(1-y)}, v = y)$ est un C^1-difféomorphisme de D sur un ouvert U que l'on déterminera.

b)**3 points** Calculer $\int_D xdxdy$.

c)**2 points** Calculer le volume de $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 < z^2(1-z)^2$ et $z \in]0,1[\}$

d)**2 points** Soit la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 = z^2(1-z)^2$ et $z \in]0,1[\}$. Donner un paramétrage de S à l'aide de $t \in]0,2\pi[$ et $z \in]0,1[$ et calculer l'aire de S (on utilisera $\int_0^1 z\,(1-z)\sqrt{1+(1-2z)^2}dz = \frac{1}{32}(\sqrt{2}-5\ln(\sqrt{2}-1))$)

a)Posons $u = \frac{x}{y(1-y)}, v = y$, l'application φ est à valeurs dans $]0,1[\times]0,1[$ car $0 < \frac{x}{y(1-y)} < 1$. Et $\varphi : D \to]0,1[\times]0,1[= U$ est bijective car

$u = \frac{x}{y(1-y)}, v = y \Leftrightarrow x = uv(1-v), y = v$ .Donc φ a pour inverse $\psi : (u,v) \to (uv(1-v), v)$. Comme φ et ψ sont C^1 comme composées de fonctions C^1 on en déduit que φ est un C^1-difféomorphisme de D sur $U =]0,1[\times]0,1[$.

b)On a $\int_D f(x,y)dxdy = \int_{]0,1[\times]0,1[} f(\psi(u,v))|\det J\psi(u,v)|dudv$. Or

$$J\psi(u,v) = \begin{pmatrix} v(1-v) & u-2uv \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\int_D f(x,y)dxdy = \int_{]0,1[\times]0,1[} uv(1-v)v(1-v)dudv$ .Comme les fonctions sont positives on a par Tonnelli

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} uv(1-v)v(1-v)dudv = \int_{]0,1[} udu \int_{]0,1[} v(1-v)v(1-v)dv = \frac{1}{2}\frac{1}{30}$$

c)Comme V est obtenu par rotation de D aotour de l'axe des z , on a par le théorème de Guldin

$$\lambda_3(V) = 2\pi\int_D rdrdz = \frac{\pi}{30}$$

d)$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = z^2(1-z)^2 \text{ et } z \in]0,1[\}$., un paramétrage de S est

$$\begin{array}{rcl} x & = & z(1-z)\cos t = \Phi_1(t,z) \\ y & = & z(1-z)\sin t = \Phi_2(t,z) \\ z & = & z = \Phi_3(t,z) \end{array}$$

où $t \in]0, 2\pi[$ et $z \in]0,1[$. On a

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \Phi_1(t,z) & = & -z(1-z)\sin t \\ \partial_t \Phi_2(t,z) & = & z(1-z)\cos t \\ \partial_t \Phi_3(t,z) & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \partial_z \Phi_1(t,z) & = & (1-2z)\cos t \\ \partial_z \Phi_2(t,z) & = & (1-2z)\sin t \\ \partial_z \Phi_3(t,z) & = & 1 \end{array}$$

donc on a un vecteur normal à S associé à ce paramétrage

$$\begin{array}{rcl} n_1(t,z) & = & z(1-z)\cos t \\ n_2(t,z) & = & z(1-z)\sin t \\ n_3(t,z) & = & -z\,(1-2z)\,(1-z) \end{array}$$

sa norme est $||n(t,z)|| = z\,(1-z)\,\sqrt{1+(1-2z)^2}$, donc on a

$$\begin{array}{rcl} aire(S) & = & \displaystyle\int_{]0,2\pi[\times]0,1[} ||n(t,z)|| dt dz = 2\pi \int_0^1 z\,(1-z)\,\sqrt{1+(1-2z)^2} dz \\ & = & \displaystyle\frac{\pi}{16}(\sqrt{2} - 5\ln\left(\sqrt{2}-1\right)) \end{array}$$