Licence 3ème année Intégration Partiel de Novembre 2007

Documents et calculatrices non autorisés.Durée 2h. Les exercices sont indépendants.

1)Déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2} dx$, $\int_0^1 \frac{1}{\ln(x)} dx$.

2)Calculer $lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{x/n} dx$ (On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$)

3)Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \sin(nt) e^{-n^2 t}$ est convergente pour tout réel $t > 0$. Est-ce que l'on peut écrire

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nt) e^{-n^2 t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(nt) e^{-n^2 t} dt$$

4)Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-x^2 t}}{t} dt$$

Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer sa dérivée, en déduire f.