Licence 3ème année Calcul Integral Examen 2009. Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h

I] a)(3 points) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b)(3 points) Montrer que $\int_{]0,+\infty[} e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2n(2n+1)}$ où l'on déterminera les coefficients a_n (utiliser $\int_{]0,+\infty[} e^{-x}x^k dx = k!$ si k est une entier positif).

II] a)(3 points) Soit $t > 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
b)(3 points) Soit $\varphi(t) = \int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}dx$. Calculer $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$.
c)(3 points) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer φ' et en déduire φ.

III] a)(3 points) Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto ye^{-y}\cos(xy)$ est intégrable sur $]0,1[\times]0,+\infty[$.
b)(3 points) Calculer $\int_{]0,1[\times]0,+\infty[} ye^{-y}\cos(xy)dxdy$.

IV] Rappel: si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on pose $(\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx} f(x)dx$ et $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz$, on a $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$ et si $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(t)e^{2i\pi tx}dt$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

a)(3 points) Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$. Calculer $\mathcal{F}f_a$.

b)(3 points) Soit n un entier strictement positif, on pose $g_a(t) = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$.Calculer $\mathcal{F}g_a$.

c)(3 points) Calculer $g_a * g_b$.

Licence 3ème année Calcul Integral Examen 2009 Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h Corrigé.

I] a)(3 points) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b)(3 points) Montrer que $\int_{]0,+\infty[} e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{2n(2n+1)}$ où l'on déterminera les coefficients a_n (utiliser $\int_{]0,+\infty[} e^{-x}x^k dx = k!$ si k est une entier positif).

a) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\left|e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}\right|dx$ est convergente car

- en 0: la fonction a une limite finie égale à 0
- en $+\infty$: on a $\left|e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}\right| \leq e^{-x}\frac{x+1}{x^2} \leq e^{-x}$ dès que $x > 2$

b) On a $\frac{\sin(x)-x}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}$ donc

$$\begin{aligned}\int_{]0,+\infty[} e^{-x}\frac{\sin(x)-x}{x^2}dx &= \int_{]0,+\infty[} e^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-1}dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_{]0,+\infty[} e^{-x}x^{2n-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n+1)}\end{aligned}$$

La permutation entre $\sum$ et $\int$ est justifiée par le fait que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}e^{-x}x^{2n-1}\right|dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}\frac{1}{(2n+1)!}e^{-x}x^{2n-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} < +\infty$$

II] a)(3 points) Soit $t > 0$. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

b)(3 points) Soit $\varphi(t) = \int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}dx$. Calculer $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)$.

c) (3 points) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer φ' et en déduire φ.

a) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\left|e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}\right|dx$ est convergente car

- en 0: la fonction a une limite finie égale à 0
- en $+\infty$: on a $\left|e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}\right| \leq e^{-xt}\frac{x+1}{x} \leq 2e^{-xt}$ dès que $x > 1$

b) On a

$$\left|e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}\right| \leq e^{-x}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

dès que $t > 1$ La fonction $x \mapsto e^{-x}\frac{1-\cos(x)}{x}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après a). Et donc on a par le théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned}lim_{t\to+\infty}f(t) &= lim_{t\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}dx \\ &= \int_{]0,+\infty[} lim_{t\to+\infty}e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}dx = \int_{]0,+\infty[} 0dx = 0\end{aligned}$$

c) La fonction $t \to e^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x \in]0,+\infty[$ et sa dérivée est $t \to -xe^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \in]\varepsilon,+\infty[$ on a

$$|-xe^{-xt}\frac{1-\cos(x)}{x}| \leq e^{-x\varepsilon}(1-\cos(x))$$

pour tout $x \in]0,+\infty[$. La fonction $x \to e^{-x\varepsilon}(1-\cos(x))$ étant intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue. la fonction f est donc dérivable sur tout intervalle $]\varepsilon,+\infty[$ et donc sur $]0,+\infty[$. On a

$$\varphi'(t) = -\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}(1-\cos(x))dx = -\int_{]0,+\infty[} e^{-xt}(1-\cos(x))dx = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$$

d'où $\varphi(t) = Log(t) - \frac{1}{2}Log(t^2+1) + C = Log(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}) + C$ et comme

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty} Log(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}) + C = C$$

on a

$$\varphi(t) = \ln(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}})$$

III] a)(3 points) Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto ye^{-y}\cos(xy)$ est intégrable sur $]0,1[\times]0,+\infty[$.
b)(3 points) Calculer $\int_{]0,1[\times]0,+\infty[} ye^{-y}\cos(xy)dxdy$.

a)Par Tonelli on a

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[\times]0,+\infty[} \left|ye^{-y}\cos(xy)\right| dxdy &= \int_{]0,+\infty[} (\int_{]0,1[} \left|ye^{-y}\cos(xy)\right| dx)dy \\ &\leq \int_{]0,+\infty[} ye^{-y}dy = 1 < +\infty\end{aligned}$$

b)Par Fubini on a

$$\begin{aligned}\int_{]0,1[\times]0,+\infty[} ye^{-y}\cos(xy)dxdy &= \int_{]0,+\infty[} ye^{-y}(\int_{]0,1[} \cos(xy)dx)dy \\ &= \int_{]0,+\infty[} e^{-y}\sin(y)dy = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

IV] Rappel: si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on pose $(\mathcal{F}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}f(x)dx$ et $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-z)g(z)dz$, on a $\mathcal{F}(f*g) = \mathcal{F}f.\mathcal{F}g$ et si $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$, $f(x) = \int_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}f)(t)e^{2i\pi tx}dt$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
a)(3 points) Soit $a > 0$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = e^{-2\pi a|x|}$. Calculer $\mathcal{F}f_a$.
b)(3 points) Soit $a > 0$, on pose $g_a(t) = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}$.Calculer $\mathcal{F}g_a$.
c)(3 points) Calculer $g_a * g_b$.

a)On a $(\mathcal{F}f_a)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}e^{-2\pi a|x|}dx$

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}f_a)(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi tx}e^{-2\pi a|x|}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2i\pi tx}e^{2\pi ax}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2i\pi tx}e^{-2\pi ax}dx \\ &= \frac{1}{2\pi(a-it)} + \frac{1}{2\pi(a+it)} = \frac{a}{\pi(a^2+t^2)}\end{aligned}$$

b)On remarque que $g_a(t) =(\mathcal{F}f_a)(t)$. Comme $g_a \in L^1(\mathbb{R})$ on a par le théorème d'inversion de Fourier

$$f_a(x) = \mathcal{F}g_a(-x)$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, d'où $\mathcal{F}g_a(t) = f_a(-t) = e^{-2\pi a|t|}$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ mais comme les fonctions $\mathcal{F}g_a$ et $t \to e^{-2\pi a|t|}$ sont continues, on a l'égalité pour tout $t \in \mathbb{R}$.
c)On a $\mathcal{F}(g_a * g_b)(t) = \mathcal{F}g_a.\mathcal{F}g_b(t) = e^{-2\pi a|t|}e^{-2\pi b|t|} = e^{-2\pi(a+b)|t|}$. La fonction $t \to e^{-2\pi(a+b)|t|}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$,on a donc par le théorème d'inversion de Fourier

$$\begin{aligned}(g_a * g_b)(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi(a+b)|t|}e^{2i\pi tx}dt \\ &= \frac{a+b}{\pi((a+b)^2+x^2)}\end{aligned}$$

pour presque tout x. Par continuité des deux termes cette égalité est vraie pour tout x.