Licence de Mathématiques – Calcul Intégral – Partiel 2009 – Corrigé.

1](6 points)

a) L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{x} dx$ est-elle convergente?

b)La fonction définie par $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$?

c)La fonction définie par $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2x}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$?

a)En integrant par parties, on voit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{x} dx$ est de même nature que $-\int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{3x^2}\sin^3 x\right) dx$ et cette dernière intégrale est convergente car $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{3x^2}\sin^3 x = 0$ et en $+\infty$ on utilise la majoration: $\frac{|\sin^3(x)|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

b)Comme les fonctions sont positives, on a

$$\int_{]0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} e^{-n^2x} dx$$

et

$$\int_{]0,+\infty[} e^{-n^2x} dx = \int_0^{\infty} e^{-n^2x} dx = 1/n^2$$

donc $\int_{]0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty$, ce qui prouve que la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.

c)On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} |(-1)^n e^{-n^2x}| dx = \int_{]0,+\infty[} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 < +\infty$$

donc par le th. de permutation entre $\sum$ et $\int$, on a l'intégrabilité de $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-n^2x}$ sur $]0, +\infty[$.

2](6 points)

a)Montrer que pour tout $n \geq 0$ la fonction $f_n : x \to \frac{e^{-x}}{1+x^n}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

b)Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx$.

a)Les fonctions $f_n : x \to \frac{e^{-x}}{1+x^n}$ sont intégrables car elles (sont continues sur $]0, +\infty[$ et) ont des intégrales impropres absolument convergentes puisque on a sur $]0, +\infty[$: $|f_n| \leq g$ où g est la fonction $x \to e^{-x}$. Donc: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx$

b)D'autre part la suite (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction f telle que $f(x) = e^{-x}$ si $x \in]0, 1[$, $f(x) = e^{-1}/2$ si $x = 1$, et $f(x) = 0$ si $x \in]1, +\infty[$.

La majoration des f_n permet d'appliquer le **théorème de la convergence dominée**:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}}{1+x^n} dx = \int_{]0,+\infty[} f(x) dx = \int_{]0,1[} e^{-x} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e} .$$

3](8 points) On rappelle que $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

a)L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{ch(x)}dx$ est-elle convergente? La fonction $x \to \frac{\sin(x)}{ch(x)}$ est-elle intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$?

b)Calculer pour tout $a > 0$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(x)dx$.

c)Montrer que$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{ch(x)}dx = A\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{2k^2+2k+1}$, où A est une constante que l'on déterminera.

a)On a

$$|\frac{\sin(x)}{ch(x)}| \leq \frac{1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}} \leq \frac{2}{e^x}$$

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^x}dx$ est convergente le théorème de comparaison donne la convergence absolue de l'intégrale, ce qui montre qu'elle est convergente et que la fonction $x \to \frac{\sin(x)}{ch(x)}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, +\infty[$.

b)On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}e^{ix}dx = \frac{a+i}{a^2+1}$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(x)dx. = \frac{1}{a^2+1}$.

c)On a

$$2\frac{\sin(x)}{e^x+e^{-x}} = 2\frac{\sin(x)}{e^x(1+e^{-2x})} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2e^{-(2k+1)x}\sin(x)$$

$$\int_0^{+\infty} 2e^{-(2k+1)x}\sin(x)dx = 2\frac{1}{(2k+1)^2+1} = \frac{1}{2k^2+2k+1}$$

Il reste à montrer que

$$\int_0^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k 2e^{-(2k+1)x}\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^k 2e^{-(2k+1)x}\sin(x)$$

On applique le th de permutation entre $\sum$ et $\int$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|(-1)^k 2e^{-(2k+1)x}\sin(x)| = 2\frac{|\sin(x)|}{e^x(1-e^{-2x})}$$

et l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2\frac{|\sin(x)|}{e^x(1-e^{-2x})}$ est convergente, car $\lim_{x\to 0+} 2\frac{|\sin(x)|}{e^x(1-e^{-2x})} = 1$ et en $+\infty$ on utilise la majoration: $2\frac{|\sin(x)|}{e^x(1-e^{-2x})} \leq 2\frac{1}{e^x(1-e^{-2x})}$ or $\int_1^{+\infty} 2\frac{1}{e^x(1-e^{-2x})}dx$ est convergente car $2\frac{1}{e^x(1-e^{-2x})} \sim 2\frac{1}{e^x}$ en $+\infty$.