Licence 3ème année Calcul Intégral. Examen de Janvier 2009. Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h.

1)**4 points)** a)Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \cos(nt)e^{-n^2t}$ est convergente pour tout réel $t > 0$.
b) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nt)e^{-n^2t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[} f(t)dt = C \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

où C est une constante que l'on déterminera.

2)**6 points)** Soit $F(t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-tx} - e^{-x}}{x} dx$, montrer que cette intégrale de Lebesgue est définie pour tout $t \in]0, +\infty[$.

Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer F' et en déduire F.

3)**6 points)** On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0$

a) Soit $A > 0$. Montrer que la fonction $(x, y) \to e^{-xy^2} \cos(x)$ est intégrable sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ et que

$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \cos(x) dx dy = C \int_0^A \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

b) Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} dy$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = C \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$.

4)**4 points)** Soit n est un entier ≥ 0.
a)Calculer

$$\int_{]0,+\infty[} (\int_{]s,+\infty[} e^{-t} t^n dt) ds$$

b)Calculer $\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy$ (on posera $u = x$ et $v = x + y$).

Licence 3ème année Calcul Intégral. Examen de Janvier 2009. Documents et calculatrices non autorisés. Durée 2h.

Corrigé

1)**4 points)** a)Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\cos(nt)e^{-n^2t}$ est convergente pour tout réel $t>0$.

b) Montrer que la fonction $f:t\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nt)e^{-n^2t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que

$$\int_{]0,+\infty[}f(t)dt=C\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

où C est une constante que l'on déterminera.

a) On a

$$\left|\cos(nt)e^{-n^2t}\right|=e^{-n^2t}\leq e^{-nt}$$

et la série $\sum_{n\geq 1}e^{-nt}$ est convergente pour tout réel $t>0$.

b)On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}\left|\cos(nt)e^{-n^2t}\right|dt\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}e^{-n^2t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$$

donc la fonction $f:t\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nt)e^{-n^2t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_{]0,+\infty[}\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(nt)e^{-n^2t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[}\cos(nt)e^{-n^2t}dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

2)**6 points)** Soit $F(t)=\int_{]0,+\infty[}\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}dx$, montrer que cette intégrale de Lebesgue est définie pour $t\in]0,+\infty[$.

Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer F' et en déduire F.

Il s'agit de montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}|\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}|dx$ est convergente. En 0 la fonction $x\to|\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}|$ a une limite finie, on a

$$|\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}|\to|1-t|$$

donc l'intégrale est convergente en 0.

Pour $x>1$ on a

$$|\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}|\leq|e^{-tx}-e^{-x}|\leq e^{-tx}+e^{-x}$$

Comme $t>0$ l'intégrale $\int_1^{+\infty}e^{-tx}dx$ est convergente , on a donc la convergence absolue de l'intégrale en $+\infty$.

Pour montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$, on va montrer que montrer que F est dérivable sur $]a,+\infty[$ pour tout $a>0$. On applique le théorème de dérivation de Lebesgue

a)La fonction $t\to\frac{e^{-tx}-e^{-x}}{x}$ est dérivable sur $]a,+\infty[$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ et sa dérivée est $t\to-e^{-tx}$

b)On a si $t\in]a,+\infty[$

$$|-e^{-tx}|=e^{-tx}\leq e^{-ax}\text{ pour tout }x\in]0,+\infty[$$

Comme la fonction $x\to e^{-ax}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut appliquer le théorème de dérivation de Lebesgue pour obtenir la dérivabilité de F et

$$F'(t)=-\int_{]0,+\infty[}e^{-tx}dx=-\frac{1}{t}$$

On en déduit que
$$F(t) = -\ln(t) + C$$
Comme $F(1) = \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-x}-e^{-x}}{x} dx = 0$, on en déduit que $C = 0$.
$$F(t) = -\ln(t)$$

3)**6 points)**On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ si $a > 0$

a)Soit $A > 0$.Montrer que la fonction $(x, y) \to e^{-xy^2} \cos(x)$ est intégrable sur $]0, A[\times]0, +\infty[$ et que
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \cos(x) dxdy = C \int_0^A \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$
où C est une constante que l'on déterminera.

b)Calculer $\lim_{A\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} dy$

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = C \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$

a)On a
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} |e^{-xy^2} \cos(x)| dxdy \leq \int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} dxdy$$
et par le théorème de Tonelli
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} dxdy = \int_{]0,A[} (\int_{]0,+\infty[} e^{-xy^2} dy) dx = \int_{]0,A[} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}} dx < +\infty$$
Par le théorème de Fubini on a
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \cos(x) dxdy = \int_{]0,A[} (\int_{]0,+\infty[} e^{-xy^2} dy) \cos(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_{]0,A[} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx$$

b)On a $\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} = 0$ et
$$|\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}| \leq e^{-Ay^2} |\frac{1}{y^2-i}| \leq \frac{1}{\sqrt{y^4+1}}$$
La fonction $y \to \frac{1}{\sqrt{y^4+1}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc par le théorème de la convergence dominée on a $\lim_{A\to+\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} dy = \int_{]0,+\infty[} lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i} dy = 0$

D'autre part
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \cos(x) dxdy = \int_{]0,+\infty[} (\int_{]0,A[} e^{-xy^2} \cos(x) dx) dy$$
Or $\int_0^A e^{-xy^2} \cos(x) dx = Re \int_0^A e^{-x(y^2-i)} dx = Re \frac{1}{y^2-i}(1 - e^{-A(y^2-i)}) = \frac{y^2}{1+y^4} - Re(\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i})$

Donc
$$\int_{]0,A[\times]0,+\infty[} e^{-xy^2} \cos(x) dxdy = \int_{]0,+\infty[} \frac{y^2}{1+y^4} dy - \int_{]0,+\infty[} Re(\frac{e^{-A(y^2-i)}}{y^2-i}) dy$$
En passant à la limite quand $A \to +\infty$ on a
$$\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \int_{]0,A[} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_{]0,+\infty[} \frac{y^2}{1+y^4} dy$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}dx$

4)**4 points)** Soit n est un entier ≥ 0.
a)Calculer

$$\int_{]0,+\infty[}(\int_{]s,+\infty[} e^{-t}t^n dt)ds$$

b)Calculer $\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy$ (on posera $u = x$ et $v = x + y$)

a)On a $\int_{]s,+\infty[} e^{-t}t^n dt = \int_{]0,+\infty[} \chi_{]s,+\infty[}(t)e^{-t}t^n dt$, et $\chi_{]s,+\infty[}(t) = \chi_{]0,t[}(s)$ et par le théorème de Tonelli

$$\begin{aligned}
\int_{]0,+\infty[}\int_{]0,+\infty[} \chi_{]s,+\infty[}(t)e^{-t}t^n dtd\alpha &= \int_{]0,+\infty[}\int_{]0,+\infty[} \chi_{]0,t[}(s)e^{-t}t^n dtds \\
&= \int_{]0,+\infty[}(\int_{]0,t[} \chi_{]0,t[}(s)ds)e^{-t}t^n dt \\
&= \int_{]0,+\infty[} te^{-t}t^n dt = (n+1)!
\end{aligned}$$

b)On a $u = x$ et $v = x + y \Leftrightarrow x = u$ et $y = v - u$.
Soit $U = \{(u,v)$ tels que $u > 0$ et $v > u\}$. L'application $\varphi : U \to]0,+\infty[\times]0,+\infty[$

$$\begin{aligned}
\varphi &: U \to]0,+\infty[\times]0,+\infty[\\
&: (u,v) \to (u, v-u)
\end{aligned}$$

est un $\mathrm{C}^1 - difféomorphisme$ et $\det J\varphi = 1$. Par le théorème de changement de variable on a

$$\int_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} e^{-x-y}(x+y)^n dxdy = \int_U e^{-v}v^n dxdy = \int_{]0,+\infty[}(\int_{]u,+\infty[} e^{-v}v^n dv)du = (n+1)!$$