COURS DE CALCUL INTEGRAL 1. B.Candelpergher

L'intégrale des fonctions continues.

Définition

Soit f une fonction *continue* sur $[a,b]$ on pose

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n})$$

Inégalité de la moyenne

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Théorème fondamental. Lien entre intégrales et primitives.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. La fonction définie sur $[a,b]$ par

$$F : x \to \int_c^x f(t)dt$$

où c est un point quelconque de $[a,b]$ est dérivable sur $[a,b]$ et vérifie

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \text{ pour tout } x\in[a,b] \\ F(c) &= 0 \end{aligned}$$

Si f est continue sur $[a,b]$, et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, on a pour tout c et d dans $[a,b]$

$$\int_c^d f(x)dx = F(d)-F(c)$$

Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions continûment dérivables sur $[a,b]$.

La formule de dérivation d'un produit $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ a pour conséquence la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(b)g(b)-f(a)g(a)] - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Changement de variables

Soit ϕ continûment dérivable sur $[a,b]$, à valeurs réelles, et soit f continue sur l'intervalle $I=\phi([a,b])$.

$$[a,b] \xrightarrow{\phi} I=\phi([a,b]) \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

La fonction f possède donc une primitive F sur I et on peut former la fonction composée $F\circ\phi$. Cette fonction est dérivable et on a $(F\circ\phi)'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Donc

$$F(\phi(b))-F(\phi(a)) = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

D'où la formule de changement de variables

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Les intégrales impropres

Il s'agit d'intégrer des fonctions f continues sur $[a,b[$ ou $]a,b[$ avec a ou b qui est éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b[$ avec b fini ou $+\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si

$$\int_a^c f(x)dx \text{ tend vers une limite finie quand } c\to b$$

dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Soit une fonction f continue sur $]a,b[$ avec a ou b qui est éventuellement $+\infty$ ou $-\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si pour tout $c\in]a,b[$ les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ sont toutes deux convergentes.

Exemples

1)L'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$.

2)L'intégrale $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}dx$ est convergente si et seulement si $\alpha<1$.

3)L'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx$ est divergente pour tout réel α.

Attention

$\star$ **Si** $f\to 0$ **en** $+\infty$**, ceci n'implique pas que** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **est convergente.**

$\star$ **Si** $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **est convergente, ceci n'implique pas que** $f\to 0$ **en** $+\infty$.

Propriétés

1)Si f est continue sur $[a,b[$ où b **est fini** et si f a une limite finie en b alors $\int_a^b f(x)dx$ est convergente.

En fait la fonction f se prolonge en une fonction continue g sur $[a,b]$ en posant

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \text{ si } x\in[a,b[\\ g(b) &= \lim_{x\to b} f(x) \end{aligned}$$

et on a

$$\lim_{\substack{c\to b\\ c<b}}\int_a^c f(x)dx = \lim_{\substack{c\to b\\ c<b}}\int_a^c g(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Exemple: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente car $\frac{\sin x}{x} \to 1$ quand $x \to 0$.

Si f est continue sur $[a, +\infty[$ et si f a une limite l **non nulle** (ou si $f \to \infty$) en $+\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.

2)Critère de comparaison

Si f est *positive* sur $[a, b[$ et si $f \leq g$, la convergence de $\int_a^b g(x)dx$ implique la convergence de $\int_a^b f(x)dx$.

La divergence de $\int_a^b f(x)dx$ implique la divergence de $\int_a^b g(x)dx$.

3)Règle des équivalents

Soit g une fonction *positive* sur voisinage de b et f une fonction telle que $f \sim g$ en b. Alors la convergence de $\int_a^b g(x)dx$ implique la convergence de $\int_a^b f(x)dx$ et la divergence de $\int_a^b g(x)dx$ implique la divergence de $\int_a^b f(x)dx$.

4)Critère de Cauchy

L'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ est convergente si et seulement si pour toute suite (b_n) qui tend vers b, on a

$$|\int_{b_p}^{b_q} f(x)dx| \to 0 \text{ quand } p \text{ et } q \text{ tendent vers } +\infty$$

5) **Lien entre série et intégrale**

Théorème

Si f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est de même nature que la série $\sum_{n\geq 0} f(n)$.

Exemple

La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{nLog(n)}$ a même nature que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{xLog(x)}dx$ qui est divergente.

Intégrales absolument convergentes

Définition

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|\ dx$ est convergente.

Théorème

Si l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ est absolument convergente alors $\int_a^b f(x)\ dx$ est convergente et on a

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exemple: L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\sin(x^2)dx$ est convergente car elle est absolument convergente.

Remarque

La réciproque est fausse.

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\sin(x)dx$ est convergente alors que $\int_0^{+\infty} |\frac{1}{x}\sin(x)|dx$ n'est pas convergente.

Le lemme d'Abel

Soit f une fonction continûment dérivable sur $[a, +\infty[$, positive et décroissante, tendant vers 0 en $+\infty$.

Soit g une fonction définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles ou complexes, telle que les intégrales de g sont bornées, c'est à dire qu'il existe un réel positif M tel que

$$|\int_c^d g(x)dx| \leq M \text{ pour tous } c \text{ et } d \text{ dans } [a, +\infty[$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est convergente et on a la "majoration du reste"

$$|\int_d^{+\infty} f(x)g(x)dx| \leq Mf(d) \text{ pour tout } d \geq a$$

Exemple

L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

est convergente ($f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \sin(x)$).

On ne peut appliquer le lemme d'Abel à l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$$

(en effet dans ce cas la fonction $g : x \to |\sin(x)|$ n'est plus à intégrales bornées).

La série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ étant divergente on a $\int_0^{N\pi} \frac{|\sin x|}{x}dx \to +\infty$ quand $N \to +\infty$ ce qui suffit à prouver la divergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}dx$.

L'intégrale de Lebesgue des fonctions positives

0.1 La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

La mesure de Lebesgue est dfinie sur les intervalles: par $\lambda(I) = longueur\ de\ I$

$\lambda([a,+\infty[) = \lambda(]-\infty,b]) = \lambda(]-\infty,+\infty[) = +\infty$

En particulier $\lambda([a,a]) = \lambda(\{a\}) = 0$ Sur les unions d'intervalles:

$I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_k \cup ...$ une union d'intervalles deux à deux disjoints

$$\lambda(I_1 \cup ... \cup I_k \cup ...) = \sum_{j\geq 1} \lambda(I_j)$$

Convention

$$\begin{aligned} a + (+\infty) &= +\infty \text{ pour tout } a \geq 0 \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

Si D est dénombrable $D = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup ...\{a_n\} \cup ...$ donc $\lambda(D) = 0$

Thèorème de prolongement

Il existe une famille $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ que l'on appelle les ensembles mesurables (ou boréliens) et une application

$$\lambda : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$$

que l'on appelle la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, qui sont caractérisés par les propriétés suivantes:

a)$\emptyset$ est mesurable $\lambda(\emptyset) = 0$

b)si A est mesurable alors $\complement A$ est mesurable

c)si les A_n sont mesurables pour $n = 1, 2, ...$ alors $\cup_n A_n$ est mesurable

d)Si les A_n sont *deux à deux disjoints* alors on a la propriété d'additivité dénombrable:

$$\lambda(\cup_n A_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda(A_n)$$

e) mesure de Lebesgue: tout intervalle I est mesurable et $\lambda(I) = longueur(I)$

Propriétés

0) Si $A \subset B$ alors $\lambda(A) \leq \lambda(B)$

1) Si (A_n) est une suite croissante

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ pour tout } n$$

alors

$$\lambda(\cup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$$

2) Si (A_n) est une suite décroissante

$$A_{n+1} \subset A_n \text{ pour tout } n$$

s'il existe N tel que $\lambda(A_N)$ est fini

$$\lambda(\cap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$$

3)Le complémentaire d'un ensemble N de mesure nulle est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle non vide $]a, b[$ doit intersecter $\mathbb{R}\backslash N$ (sinon il serait inclus dans N, ce qui donnerait $\lambda(N) \geq b - a > 0$)

4)Translations et homothéties

La mesure λ est plus invariante par translation: $\lambda(T_a A) = \lambda(A)$ pour toute translation $T_a : x \to x + a$, de $\mathbb{R}$

On a pour tout α dans $\mathbb{R}$, $\lambda(\alpha A) = |\alpha|\lambda(A)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, si on note $\alpha A = \{\alpha x | x \in A\}$

Existe t'il des ensembles non mesurables?

Théoriquement oui, **pratiquement non,** toutes les parties de $\mathbb{R}$ qui se présentent naturellement sont mesurables.

0.2 Les fonctions mesurables

Définition: fonction étagée

Une fonction étagée e sur $\mathbb{R}$ est une fonction qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes $c_1, c_2, ..., c_N$ et telle que pour tout $i = 1, 2, ..., N$, l'ensemble $A_i = \{x \in \mathbb{R} | e(x) = c_i\}$ est mesurable.

$$e = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}$$

Remarque: une fonction en escalier est une fonction étagée, la réciproque est fausse, exemple $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Définition: fonction mesurable

On dit qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable si f est limite simple d'une suite de fonctions étagées

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} e_n(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

ou encore, si $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in I\}$ est mesurable pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Propriétés

1)Si f et g sont mesurables, alors $f + g$ et $f.g$ sont mesurables, il en est de même de $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$.

2)Si f est mesurable, $f =$ diffèrence de deux fonctions mesurables positives

$$f = f_+ - f_-$$

où $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = -\min(0,f)$.
3)Si f est mesurable, $|f|$ est aussi mesurable

$$|f| = f_+ + f_- = \sup(f,-f)$$

Théorème de la limite simple
Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction f sur $\mathbb{R}$, alors f est mesurable.

Exemples
Toute fonction continue est mesurable.
Toute fonction continue par morceaux est mesurable.
Toute fonction qui s'obtient comme limite simple de fonctions continues par morceaux est donc mesurable.
Il existe des fonctions mesurables qui peuvent être discontinues en tout point, exemple $\chi_{\mathbb{Q}}$

Dans la pratique toutes les fonctions qui se présentent sont mesurables.

0.3 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition
Soit e une fonction étagée positive $e = \sum_{i=1}^n c_i\chi_{A_i}$ où les $A_i, i = 1,2,...n$, forment une partition de $\mathbb{R}$.
Soit A un ensemble mesurable. On définit l'intégrale sur A de cette fonction par

$$\int_A e\ dx = \sum_{i=1}^n c_i\lambda(A_i \cap A) \in [0,+\infty]$$

Remarque
Le fait de prendre e positive fait que dans la somme qui définit $\int_{\mathbb{R}} e\ d\lambda$, on ne peut pas se trouver confronté à une expression du type $+\infty - \infty$.
Par contre on peut très bien avoir $c_i = 0$ et $\lambda(A_i \cap A) = +\infty$, dans ce cas on pose: $0.(+\infty) = 0$ Ceci traduit simplement le fait que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} 0.\chi_A\ dx = 0.\lambda(A) \text{ même si } \lambda(A) = +\infty$$

0.3.1 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition
Soit f une fonction mesurable positive et A un ensemble mesurable. On définit

$$\int_A f\ dx = \sup\{\int_A e\ dx | e \text{ est étagée et } 0 \le e \le f\}$$

On a $\int_A f\ dx \in [0,+\infty]$, si ce sup n'est pas $+\infty$ on note $\int_A f\ dx < +\infty$ et on dit que la fonction f est **intégrable sur** A.

Propriétés
1)Si $f \le g$ sur A alors $\int_A f dx \le \int_A g dx$.
2)Si f est mesurable positive et $f \le g$ sur A alors

$$g \text{ intégrable sur } A \Longrightarrow f \text{ est intégrable sur } A.$$

3)Si $B \subset A$ et f positive et intégrable sur A, alors f est aussi intégrable sur B

$$\int_B f dx = \int_A f\chi_B dx \le \int_A f dx$$

4) On a $\int_A (f+g)\ dx = \int_A f\ dx + \int_A g\ dx$ et
$\int_A cf\ dx = c\int_A f\ dx$ si c est une constante positive.
5)Si f est mesurable positive et si $A = \cup A_n$ où les A_n sont mesurables et deux à deux disjoints, alors $\int_A f\ dx = \sum_n \int_{A_n} f\ dx$
6)Si f est mesurable positive et si $\lambda(\{x \in A | f(x) > 0\}) = 0$ alors $\int_A f\ dx = 0$.

Théorème Une fonction positive continue f sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_a^b f(x)dx$$

Une fonction continue positive sur $[a,b[$ (b fini ou $+\infty$) est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si l'intgrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et dans ce cas $\int_{[a,b[} f dx = \int_a^b f(x)dx$.

Théorème de la convergence monotone
Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables **positives** sur A. On suppose que (f_n) est **croissante**

$$f_{n+1}(x) \ge f_n(x) \text{ pour tout } x \in A$$

et converge simplement vers f sur A : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in A$
Alors $\int_A f\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\ dx$ (éventuellement $+\infty$) cette limite étant finie si et seulement si f est intégrable sur A.

Théorème de permutation entre $\sum$ et $\int$ pour les fonctions positives
Soit $\sum u_n$ une série de fonctions mesurables positives qui converge simplement sur A, on a

$$\int_A \sum_{n=0}^{\infty} u_n\ dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A u_n\ dx$$

En particulier la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est intégrable si et seulement si la série numérique $\sum_n \int_A u_n\ dx$ est convergente.

COURS DE CALCUL INTEGRAL 3. B.Candelpergher

L'intégrale de Lebesgue des fonctions complexes

Soit f mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}$$

Définition: fonction intégrable

On dit que f est intégrable sur A si f_+ et f_- le sont, c'est-à-dire si

$$\int_A f_+ \ dx < +\infty \text{ et } \int_A f_- \ dx < +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_A |f| \ dx < +\infty$$

dans ce cas on pose:

$$\int_A f \ dx = \int_A f_+ \ dx - \int_A f_- \ dx$$

Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$ on dit que f est intégrable sur A si

$$\int_A |f| \ dx < +\infty$$

dans ce cas on pose

$$\int_A f \ dx = \int_A Ref \ dx + i \int_A Imf \ dx$$

Propriétés

1) Linéarité: $\int_A (f + cg)dx = \int_A f \ dx + c \int_A g \ dx$ pour tout c dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2) Positivité: si $f \geq 0$ alors $\int_A f \ dx \geq 0$

Conséquence:

si f et g sont à valeurs réelles $f \leq g \Longrightarrow \int_A f \ dx \leq \int_A g \ dx$

3) Si A est de mesure nulle, alors $\int_A f \ dx = 0$ pour toute fonction mesurable f.

En particulier si f est intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,b[} f dx = \int_{]a,b]} f dx = \int_{]a,b[} f dx$$

4) Si f est mesurable et s'il existe g intégrable sur A telle que $|f| \leq g$, alors f est intégrable sur A.

5) On a l'équivalence

$$f \text{ est intégrable sur } A \Longleftrightarrow |f| \text{ est intégrable sur } A.$$

et

$$|\int_A f \ dx| \leq \int_A |f| \ dx$$

6) Si f est intégrable sur A alors f est intégrable sur B si $B \subset A$.

7) Si A et B sont disjoints on a

$$\int_{A \cup B} f dx = \int_A f dx + \int_B f dx$$

en particulier on a si $a \leq c \leq b$

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,c]} f dx + \int_{[c,b]} f dx$$

0.0.1 Presque partout

On peut modifier une fonction f sur un sous-ensemble $N \subset A$ de mesure nulle, cela ne modifie pas l'intégrale de f

$$\int_A f dx = \int_{A \setminus N} f dx + \int_N f dx = \int_{A \setminus N} f dx$$

Si f et g sont deux fonctions définies sur A telles que $f = g$ sur $A \setminus N$ avec N de mesure nulle, alors on dit que f et g sont **égales presque partout** sur A et on a

$$\int_A f dx = \int_A g dx$$

0.1 Lien avec l'intégrale usuelle

Soit f continue sur $[a, b]$ on a deux définitions:

$\int_a^b f(x)dx$	$\int_{[a,b]} f \ dx$
intégrale usuelle (du Ch1)	intégrale de Lebesgue

Théorème A

Si f est continue sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors f est intégrable sur $[a, b]$, et on a

$$\int_{[a,b]} f \ dx = \int_a^b f(x)dx$$

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (c'est à dire sauf en un nombre fini de points où les limites à droite et à gauche de f sont finies) la conclusion précédente reste valable.

Cas des intégrales impropres:

Lien entre $\int_{[a,b[} f \ \ dx$ et l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ (b fini ou non)

Théorème B

Si on est dans la situation d'une intégrale impropre en b c'est à dire f continue sur tout $[a, b[$ alors

$$f \text{ est intégrable sur } [a, b[\ \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|dx \text{ est convergente}$$

dans ce cas l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est convergente et on a

$$\int_{[a,b[} f\ dx = \int_a^b f(x)dx$$

Attention

Il existe des fonctions qui possèdent une intégrale impropre convergente mais qui ne sont pas Lebesgue-intégrables. Soit $f : x \to \frac{\sin(x)}{x}$ sur $[1, +\infty[$ l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx$ est convergente, mais f **n'est pas intégrable sur** $[1, +\infty[$, car l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}dx$ n'est pas convergente.

Propriété: Si f est mesurable, on a

$\int_A |f|\ dx = 0 \Longrightarrow f$ est nulle presque partout sur A.

Espace $L^1(A)$

$L^1(A) = \mathcal{L}^1(A)$ où on identifie deux fonctions qui sont égales presque partout sur A

$f = g$ dans $L^1(A)$ si et seulement si f et g sont égales presque partout sur A

$L^1(A)$ est l'espace quotient de $\mathcal{L}^1(A)$ par la relation d'équivalence qui consiste à dire que les fonctions f et g sont équivalentes si elles sont presque partout égales.

Définition

Soit $L^1(A)$ l'espace des fonctions intégrables sur A, l'application

$$f \to ||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f|\ dx$$

est une norme sur cet espace, "la norme L^1". On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge au sens L^1 si elle converge dans l'espace normé $(L^1(A), ||\ ||_1)$

i.e. s'il existe $f \in L^1(A)$ telle que $||f_n - f||_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Remarque. Si (f_n) converge vers f dans l'espace normé $(L^1(A), ||\ \ ||_1)$, alors $\int_A f_n\ dx \to \int_A f\ dx$ quand $n \to +\infty$. La réciproque est fausse (prendre $A = \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[0,1]}$ et $f = \chi_{[1,2]}$).

Thèorème

Soit (u_n) une suite dans $L^1(A)$, telle que la série numérique $\sum_n ||u_n||_1$ soit convergente, alors $\sum u_n$ est convergente dans l'espace normé $L^1(A)$. L'espace normé $(L^1(A), ||\ ||_1)$ est complet.

0.2 Les théorèmes de permutation

Thèorème de la convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur A.

a)(f_n) qui converge simplement sur A vers une fonction f

b) il existe g intégrable sur A, indépendante de n, telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ pour tout } x \in A$$

Alors f est intégrable sur A et

$$\int_A f\ dx = \lim_{n\to+\infty} \int_A f_n\ dx$$

De plus on a $lim_{n\to+\infty} \int_A |f_n - f|dx = 0$

Théorème 1 Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables sur A telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_A |u_n|\ dx < +\infty$$

alors

a)la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente pour presque tout $x \in A$

b)la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est intégrable sur A

c)la série numérique $\sum \int_A u_n\ dx$ est convergente et on a

$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A u_n\ dx$$

Théorème 2 Soit (u_n) une suite de fonctions mesurables sur A telle que

a)la série $\sum |u_n|$ est convergente

b)

$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\ dx < +\infty$$

alors la fonction $x \to \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est intégrable sur A et

$$\int_A \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_A u_n\ dx$$

Exemple

$u_n : x \to (-1)^n x e^{-(n+1)x}$ sur $]0, +\infty[$

Résumé. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_A |u_n|\ dx = \int_A \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\ dx$ Si l'une de ces deux intégrales est finie alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_A u_n\ dx = \int_A \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\ dx$$

COURS DE CALCUL INTEGRAL 4. B.Candelpergher

Fonctions définies par une intégrale

Les fonctions définies par une intégrale se présentent sous la forme

$$\phi(t) = \int_I f(t,x)\ dx$$

Exemple $\phi(t) = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$

Notations

Soit U et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad U \times I \to \mathbb{C} \\ &: \quad (t,x) \to f(t,x) \end{aligned}$$

On appelle dérivée partielle de f par rapport à t au point (t_0, x_0) le nombre

$$\partial_t f(t_0,x_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x_0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(t_0+\alpha, x_0) - f(t_0,x_0)}{\alpha}$$

On appelle dérivée partielle de f par rapport à t la fonction

$$\begin{aligned} \partial_t f \quad &: \quad U \times I \to \mathbb{C} \\ &: \quad (t,x) \to \partial_t f(t,x) \end{aligned}$$

Théorème de convergence dominée

Soit $U = [\alpha, t_0[$ (où t_0 est fini ou $+\infty$), I un intervalle de $\mathbb{R}$ et une fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad U \times I \to \mathbb{C} \\ &: \quad (t,x) \to f(t,x) \end{aligned}$$

telle que

a) $\lim_{t \to t_0} f(t,x)$ est finie pour tout $x \in I$

b)il existe un intervalle $V =]a, t_0[$,

il existe g intégrable sur I indépendante de t

$$|f(t,x)| \leq g(x) \text{ pour tout } t \in V, \text{ pour tout } x \in I.$$

Alors

$$\lim_{t \to t_0} \int_I f(t,x)\ dx = \int_I \lim_{t \to t_0} f(t,x)\ dx$$

Exemple

$$\phi(t) = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$$

définie pour $t \in [0,+\infty[$, calcul de $\lim_{t \to +\infty} \phi(t)$

Théorème de continuité de Lebesgue

Si $t \to f(t,x)$ est continue sur un intervalle $V \subset U$ pour tout $x \in I$ et si

il existe g intégrable sur I telle que $|f(t,x)| \leq g(x)$

pour tout $t \in V$ et pour tout $x \in I$.

Alors $\phi : t \to \int_I f(t,x)\ dx$ est continue sur V.

Exemple: Soit pour tout $t > 0$

$$\phi(t) = \int_{[0,+\infty[} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$$

La fonction ϕ est continue en tout point $t \in [0,+\infty[$

Théorème de dérivabilité de Lebesgue

Soit U et I des intervalles de $\mathbb{R}$ et une fonction

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad U \times I \to \mathbb{C} \\ &: \quad (t,x) \to f(t,x) \end{aligned}$$

Si $t \to f(t,x)$ est dérivable sur un intervalle ouvert $V \subset U$ pour tout $x \in I$ et si

il existe g intégrable sur I telle que $|\partial_t f(t,x)| \leq g(x)$

pour tout $t \in V$ et pour tout $x \in I$.

Alors $\phi : t \to \int_I f(t,x)\ dx$ est dérivable sur V et on a

$$\phi'(t) = \int_I \partial_t f(t,x)\ dx$$

Remarque importante

La continuité et la dérivabilité sont des notions locales pour montrer que ϕ est continue ou dérivable sur U, il suffit de montrer que pour tout point t de U la fonction ϕ est continue ou dérivable sur un voisinage V de t.

Exemple. Soit la fonction ϕ définie sur $]0,+\infty[$ par $\phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+x^2)e^{-tx^2}}{1+x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx^2} dx + \phi(t) \\ &= -\frac{C}{\sqrt{t}} + \phi(t) \text{ où } C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\ du \end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle

$$\phi'(t) - \phi(t) = -\frac{C}{\sqrt{t}}$$

avec la condition initiale $\phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$, donne

$$\phi(t) = e^t(\pi - 2C \int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\ dx)$$

Comme $\lim_{t\to+\infty}\phi(t)=0$ on en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} 2C\int_0^{\sqrt{t}} e^{-x^2}\,dx = \pi \text{ d'où } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

La fonction Γ
Pour tout entier positif n on a:

$$n! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$$

Idée: définir $t!$ pour tout *réel* $t > -1$:

$$t! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^t dx$$

Usage: transformer la condition $t > -1$
en une condition $t > 0$.
La fonction définie pour $t \in]0, +\infty[$ par

$$\Gamma(t) = (t-1)! = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}dx$$

En intégrant par parties, on vérifie que

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \text{ pour tout } t > 0$$

Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

Définition Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit la *transformée de Fourier* de f comme la fonction définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx\,.$$

Il est clair que cette intégrale est bien définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ car

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx\,.$$

La fonction $\mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorme de continuité de Lebesgue.

Lemme de Riemann-Lebesgue Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}f$ tend vers 0 l'infini (on note $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

L'application $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est linéaire

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}f + \beta\mathcal{F}g$$

(α et β étant des constantes).

Elle est continue de $(L^1(\mathbb{R}), ||\ ||_1)$ dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), ||\ ||_\infty)$ car

$$||\mathcal{F}f||_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = ||f||_1\,.$$

L'application $\mathcal{F}$ s'appelle la *transformation de Fourier.*

On a $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ mais $\mathcal{F}f$ n'est pas nécessairement intégrable.

Exemple. Soit $a > 0$ et $f = \chi_{[-a,a]}$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\,dx \\ &= \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi\xi x}\,dx \\ &= \frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}\end{aligned}$$

et on sait que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{\sin 2\pi a\xi}{\pi\xi}|d\xi$ est divergente.

Propriétés de la transformation de Fourier

1) $\mathcal{F}$ conserve la parité.

2) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)g\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(\mathcal{F}g)\,dx\,.$$

3) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et $\partial f \in L^1(\mathbb{R})$ on a

$$\mathcal{F}(\partial f) = 2i\pi\xi\mathcal{F}f\,.$$

4) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $xf \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}f$ est dérivable et

$$\partial(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(-2i\pi xf)\,.$$

On peut résumer ce qui précde en disant que $\mathcal{F}$ transforme dérivabilité en comportement l'infini, en gros on peut dire que: plus f est dérivable, et plus $\mathcal{F}f$ tend vite vers 0 l'infini.

Transformée de Fourier des gaussiennes

Soit $g_a(x) = e^{-ax^2}$, $a > 0$ La fonction ψ définie par

$$\psi(\xi) = (\mathcal{F}g_a)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} e^{-ax^2}\,dx$$

vérifie une équation différentielle simple, que l'on pourra résoudre:

$$\begin{aligned}\psi'(\xi) &= \frac{-i\pi}{a}\int_{\mathbb{R}} (-2i\pi\xi) e^{-2i\pi\xi x} e^{-ax^2}\,dx \\ &= \frac{-2\pi^2}{a}\xi\psi(\xi)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que $\psi(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\pi^2\xi^2/a}$.

En particulier on voit que la fonction $x \to e^{-\pi x^2}$ est sa propre transformée de Fourier:

$$\mathcal{F}(e^{-\pi x^2}) = e^{-\pi\xi^2}\,.$$

Injectivité de la transformation de Fourier

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $g \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}f = \mathcal{F}g \text{ implique } f = g \text{ dans } L^1(\mathbb{R})\,.$$

La propriété d'injectivité ci-dessus ne donne que l'égalité presque partout des fonctions f et g.

Théorme d'inversion de Fourier *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R})$ alors on a*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi\xi x}\mathcal{F}f(\xi)d\xi$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

COURS DE CALCUL INTEGRAL 5. B.Candelpergher

Intégrales multiples

1)La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Sur $\mathbb{R}^2$ c'est la notion d'aire usuelle: définie sur les rectangles $I_1 \times I_2$ où I_1 et I_2 sont des intervalles

$$aire(I_1 \times I_2) = \lambda(I_1).\lambda(I_2)$$

Problème: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ définir une mesure $\lambda_2(A)$ qui représente l'aire de A.

Découpage horizontal de A:
pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$

$$A_{x_2} = \{x_1 | (x_1, x_2) \in A\} \subset \mathbb{R}$$

la coupe de A suivant la droite horizontale d'ordonnée x_2, on pose

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{x_2}) dx_2 \in [0, +\infty]$$

Découpage vertical de A

pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$A_{x_1} = \{x_2 | (x_1, x_2) \in A\} \subset \mathbb{R}$$

coupe de A suivant la droite verticale d'abcisse x_1, on pose

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{x_1}) dx_1 \in [0, +\infty].$$

Théorème

Il existe une famille de parties $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{x_1}) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{x_2}) dx_2$$

on pose

$$\lambda_2(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(A_{x_k}) dx_k$$

λ_2 possède les propriétés a)b)c)d) d'une mesure.

Définition: Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

Soit une partie A de $\mathbb{R}^n$ est mesurable, on peut obtenir $\lambda_n(A)$ par découpage de A. C'est à dire, pour tout $k = 1...n$, et tout $x_k \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$A_{x_k} = \{(x_1, .., x_{k-1}, x_{k+1}, .., x_n) | (x_1, ..., x_n) \in A\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

Il existe une famille de parties $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ telles que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_{x_k}) dx_k$$

soit indépendant de k.

$$\lambda_n(A) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}(A_{x_k}) dx_k$$

λ_n possède les propriétés d'une mesure.

Propriétés

1) invariance par translation

$$\lambda_n(T_a(A)) = \lambda_n(A) \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^n$$

2) $\lambda_n(\alpha A) = |\alpha|^n \lambda_n(A)$ si $\alpha \in \mathbb{R}$.

3) Soit Φ est une application linéaire orthogonale de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ i.e. Φ conserve le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n (\Phi(x)|\Phi(y)) = (x|y)$ i.e. la matrice O de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est telle que ${}^tO = O^{-1}$ Alors λ_n est invariante par Φ

$$\lambda_n(\Phi(A)) = \lambda_n(A)$$

2)Volume et déterminant

Soit Φ une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

L'image de la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est un système de vecteurs $(v_1, ..., v_n)$ qui forme une base de $\mathbb{R}^n$, le "parallélépipède" engendré par ces vecteurs est

$$P_n = \Phi([0,1]^n) = \{x \in \mathbb{R}^n | x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \text{ où } 0 \le x_i \le 1 \text{ pour tout}$$

Le "volume" dans $\mathbb{R}^n$ du "parallélépipède" $\Phi([0,1]^n)$ engendré par les vecteurs $\Phi(e_1), ..., \Phi(e_n)$ est

$$\lambda_n(\Phi([0,1]^n)) = |\det(\Phi)|$$

Théorème du déterminant (cas linéaire)

Soit Φ une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\Phi(B)$ est mesurable et on a

$$\lambda_n(\Phi(B)) = |\det \Phi| \ \lambda_n(B)$$

3)Intégration des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

a)On définit les fonctions étagées positives sur $\mathbb{R}^n$

$$e = \sum_{finie} e_i \chi_{A_i}$$

où les A_i sont des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$.
On définit l'intégrale sur $\mathbb{R}^n$ de ces fonctions par

$$\int_{\mathbb{R}^2} e \ dx_1 dx_2 ... dx_n = \sum_{finie} e_i \lambda(A_i)$$

b)**Définition: fonctions mesurables**

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable si
f est limite simple d'une suite (e_n) de fonctions étagées ou encore si
$f^{-1}(I)$ est mesurable pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$

Si $f \ge 0$, on pose

$$\int_A f\ dx = \sup\{\int_A e\ dx_1dx_2...dx_n\}$$

où e parcourt les fonctions étagées telles que $0 \leq e \leq f\}$
Si ce sup n'est pas $+\infty$ on note

$$\int_A f\ dx < +\infty$$

et on dit que la fonction f est intégrable sur A.
c)On passe ensuite aux fonctions mesurables réelles en décomposant f en $f = f_+ - f_-$ et si f est intégrable, c'est à dire si

$$\int_A |f|\ dx_1dx_2...dx_n < +\infty$$

on pose

$$\int_A f\ dx_1dx_2...dx_n = \int_A f_+\ dx_1...dx_n - \int_A f_-\ dx_1...dx_n$$

Tous les théorèmes des chapitres 2 et 3 restent valables dans $\mathbb{R}^n$.

4)Calcul des intégrales
Le cas $n = 2$
Théorème de Tonelli
Soit f mesurable, positive sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_1)\ dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_2)dx_1\end{aligned}$$

où toutes ces intégrales peuvent éventuellement être infinies.
f est intégrable$\Longleftrightarrow$ l'une de ces quantités est finie

Cas particuliers
1)$A = A_1 \times A_2$
f est une fonction mesurable positive

$$\begin{aligned}\int_{A_1\times A_2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 &= \int_{A_1}(\int_{A_2} f(x_1,x_2)dx_2)dx_1 \\ &= \int_{A_2}(\int_{A_1} f(x_1,x_2)dx_1)dx_2\end{aligned}$$

2)Si f_i et f_2 sont deux fonctions mesurables, positives sur $\mathbb{R}$
Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par

$$f_1 \otimes f_2 : (x_1,x_2) \to f_1(x_1)f_2(x_2)$$

$f_1 \otimes f_2$ est le **produit tensoriel** de f_1 et f_2

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1(x_1)f_2(x_2)dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}} f_1(x_1)dx_1 \int_{\mathbb{R}} f_2(x_2)\ dx_2$$

où toutes ces intégrales peuvent éventuellement être infinies
Et $f_1 \otimes f_2$ est intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} f_1(x_1)dx_1 \text{ est finie et } \int_{\mathbb{R}} f_2(x_2)\ dx_2 \text{ est finie}$$

Attention $f_1 \otimes f_2 \neq f_1.f_2$

Théorème de Fubini
Soit f mesurable sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, f est intégrable si et seulement si l'une des intégrales

$$\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1,x_2)|dx_1)\ dx_2 = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} |f(x_1,x_2)|dx_2)dx_1$$

est finie et dans ce cas on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_1)\ dx_2 = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2$$

Remarque
L'hypothèse du théorème de Fubini, porte sur les intégrales de $|f|$, si on sait seulement que l'une des deux (ou les deux) intégrales $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f\ dx_2)\ dx_1$ ou $\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f\ dx_1)dx_2$ est finie, rien n'assure que f est intégrable et que l'on peut permuter les intégrales.

Le cas général
On a comme ci-dessus, les théorèmes de Tonelli et de Fubini.

Théorème de Tonelli
Soit f mesurable, positive sur $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx_1...dx_n = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\ dx_1dx_{i-1}dx_{i+1}..dx_n)\ dx_i \text{ pour tou}$$

où ces intégrales peuvent éventuellement être infinies.
Et f est intégrable si et seulement si l'une de ces quantités est finie

Théorème de Fubini
Soit f mesurable sur $\mathbb{R}^n$, f est intégrable si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} ... \int_{\mathbb{R}} |f|\ dx_1dx_2...dx_n$$

est finie et dans ce cas on a pour tout i:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx_1dx_2...dx_n = \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\ dx_1dx_{i-1}dx_{i+1}..dx_n)\ dx_i$$

1 Formule de changement de variables

Faire un changement de variables dans une intégrale $\int_V f(x)dx$ (où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, consiste à poser $x = \varphi(\alpha)$ où φ est une application:

$$\begin{array}{rl} \varphi & : U \to V \\ & : \alpha \to x \\ & : (\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n) \to (x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

U étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et à écrire:

$$\int_V f(x)dx_1dx_2...dx_n = \int_U g(\alpha)d\alpha_1 d\alpha_2...d\alpha_n$$

On va voir que sous certaines hypothèses sur φ, on a une telle formule de changement de variables où g s'exprime simplement à l'aide de f et φ.

Notation

On notera les composantes de $\varphi(\alpha) \in \mathbb{R}^n$ sous la forme

$$\varphi(\alpha) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) \\ . \\ . \\ \varphi_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

Les composantes de φ sont les fonctions $\varphi_k : U \to \mathbb{R}$, on définit la dérivée partielle de φ_k au point α comme étant

$$\partial_i \varphi_k(\alpha) = \lim_{h_i \to 0} \frac{\varphi_k(\alpha_1, .., \alpha_i + h_i, .., \alpha_n) - (\alpha_1, .., \alpha_i, .., \alpha_n))}{h_i}$$

en supposant que cette limite existe (est finie), dans ce cas la fonction

$$\begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ \alpha & \to & \partial_i \varphi_k(\alpha) \end{array}$$

est notéé $\partial_i \varphi_k$ et s'appelle la dérivée i ème dérivée partielle de φ_k.

Définition

On appellera changement de variables une application $\varphi : U \to V$ où U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que φ est un $C^1 - \textit{difféomorphisme de } U \textit{ sur } V$, c'est à dire:

$\star$ φ est bijective de U sur $V = \varphi(U)$

$\star$ les dérivées partielles des φ_k existent et sont continues sur U pour tout $k = 1, .., n$.

$\star$ $\det(J(\varphi)(\alpha)) \neq 0$ pour tout $\alpha \in U$,où $J(\varphi)(\alpha)$ est la matrice jacobienne de φ en α, définie par

$$J(\varphi)(\alpha) = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1(\alpha) & \partial_2\varphi_1(\alpha) & . & . & \partial_n\varphi_1(\alpha) \\ \partial_1\varphi_2(\alpha) & \partial_2\varphi_2(\alpha) & . & . & \partial_n\varphi_2(\alpha) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \partial_1\varphi_n(\alpha) & \partial_2\varphi_n(\alpha) & . & . & \partial_n\varphi_n(\alpha) \end{pmatrix}$$

Théorème général du déterminant

Soient U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : U \to V$ un changement de variables.

Pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\varphi(B)$ est mesurable et

$$\lambda_n(\varphi(B)) = \int_B |\det\ (J(\varphi)(\alpha_1, ..., \alpha_n))|\ d\alpha_1 d\alpha_2...d\alpha_n$$

Remarque Si φ est linéaire inversible de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on a $\lambda_n(\varphi(B)) = |\det \varphi|\ \lambda_n(B)$

Formule de changement de variables

Soit φ est un $C^1 - \textit{difféomorphisme de } U \textit{ sur } V$.

Toute fonction mesurable f est intégrable sur V si et seulement si

$(f \circ \varphi)|\det(J(\varphi))|$ est intégrable sur U et dans ce cas on a:

$$\int_V f(x_1, .., x_n)\ dx_1...dx_n =$$

$$\int_U f(\varphi(\alpha_1, .., \alpha_n))\ |\det(J(\varphi)(\alpha_1, .., \alpha_n))|\ d\alpha_1...d\alpha_n$$

Formules classiques

► Passage en polaires dans $\mathbb{R}^2$

Soit D la demi-droite $]-\infty, 0] \times \{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et φ définie par:

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus D \\ (r, \theta) & \to & (x_1 = r\cos(\theta), x_2 = r\sin(\theta)) \end{array}$$

On a pour toute fonction intégrable f

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x_1, x_2)dx_1dx_2 \\ &= \int_{]0,+\infty[\times]-\pi,+\pi[} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdr\epsilon \end{aligned}$$

► Passage en sphériques dans $\mathbb{R}^3$

Soit P le demi-plan $[0, +\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^3$ et φ définie par:

$$\begin{array}{ccc}]0, +\infty[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \setminus P \\ (r, \theta_1, \theta_2) & \to & (x_1, x_2, x_3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \varphi_3(r,\theta_1,\theta_2) = r\sin\theta_1 \\ x_2 &= \varphi_2(r,\theta_1,\theta_2) = r\cos\theta_1\sin\theta_2 \\ x_1 &= \varphi_1(r,\theta_1,\theta_2) = r\cos\theta_1\cos\theta_2 \end{aligned}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x_1,x_2,x_3)dx_1dx_2dx_3$$

$$= \int_{]0,+\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[} g(r,\theta_1,\theta_2)r^2\cos(\theta_1)drd\theta_1d\theta_2$$

où

$$g(r,\theta_1,\theta_2) = f(r\cos\theta_1\cos\theta_2, r\cos\theta_1\sin\theta_2, r\sin\theta_1)$$

2 Intégrales liées aux courbes et aux surfaces

2.1 L'intégrale sur une courbe de $\mathbb{R}^2$

Soit S est une courbe dans $\mathbb{R}^2$ donnée avec un paramétrage

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\supset I \to S \subset \mathbb{R}^2 \\ s &\to \Phi(s) = (\Phi_1(s),\Phi_2(s)) \end{aligned}$$

où Φ est injective sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et Φ_1, Φ_2 sont des fonctions C^1 sur I telles que

$$(\Phi_1'(s),\Phi_2'(s)) \neq (0,0) \text{ pour tout } t \in I$$

On dispose en tout point de S d'un vecteur tangent
$\tau(s) = (\Phi_1'(s),\Phi_2'(s))$
et donc d'un vecteur normal $u(s) = (-\Phi_2'(s),\Phi_1'(s))$
IDéfinition: longueur de la courbe S

$$\sigma(S) = \int_{]a,b[}((\Phi_1'(s))^2 + (\Phi_2'(s))^2)^{1/2}ds = \int_{]a,b[}||u(s)||ds$$

On peut aussi mesurer par la même méthode la longueur de toute partie C de S, application $\sigma : C \to \sigma(C)$ qui possède des propriétés analogues à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$. On peut aussi définir l'intégrale d'une fonction f définie sur S par rapport à cette mesure, en posant

$$\int_S f d\sigma = \int_I f(\Phi(s))||u(s)||ds$$

2.2 L'intégrale sur une surface de $\mathbb{R}^3$

Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$, on peut définir de la même manière que ci-dessus une mesure σ sur S.
On suppose que l'on a un paramétrage

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\supset J \to S \subset \mathbb{R}^3 \\ s &= (s_1,s_2) \to \Phi(s) = (\Phi_1(s),\Phi_2(s),\Phi_3(s)) \end{aligned}$$

où $J =]a,b[\times]c,d[$
Le plan tangent à S au point $\Phi(s)$ est engendré par les vecteurs

$$v_1(s) = \begin{pmatrix} \partial_{s_1}\Phi_1(s) \\ \partial_{s_1}\Phi_2(s) \\ \partial_{s_1}\Phi_3(s) \end{pmatrix} \text{ et } v_2(s) = \begin{pmatrix} \partial_{s_2}\Phi_1(s) \\ \partial_{s_2}\Phi_2(s) \\ \partial_{s_2}\Phi_3(s) \end{pmatrix}$$

Si on pose

$$\begin{aligned} u_1(s) &= (+1)\det J(\Phi_2(s),\Phi_3(s)) \\ u_2(s) &= (-1)\det J(\Phi_1(s),\Phi_3(s)) \\ u_3(s) &= (+1)\det J(\Phi_1(s),\Phi_2(s)) \end{aligned}$$

On vérifie que le vecteur

$$u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ u_3(s) \end{pmatrix}$$

est orthogonal au plan tangent à S au point $\Phi(s)$
(le produit scalaire de $u(s)$ avec $v_1(s)$ ou $v_2(s)$ est le déterminant d'une matrice dont deux colonnes sont égales).
Définition: aire de S

$$\sigma(S) = \int_J ||u(s)||ds$$

On peut aussi mesurer l'aire d'une partie C de S, on obtient ainsi une application $\sigma : C \to \sigma(C)$ qui possède des propriétés analogues à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$.
On peut aussi définir l'intégrale d'une fonction f définie sur S par rapport à la mesure σ, en posant

$$\int_S f d\sigma = \int_J f(\Phi(s))||u(s)||ds$$

Application: Mesure sur la sphère
Si $S = \mathbb{S}_r$ est la sphère de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^3$, on peut prendre comme paramétrage

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\supset]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[\to S \subset \mathbb{R}^3 \\ s &\to \Phi(s) = (\varphi_1(s),\varphi_2(s),\varphi_3(s)) \end{aligned}$$

Soit σ_r la mesure construite sur S, on a

$$\int_{\mathbb{S}_r} f d\sigma_r = \int_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[} f(\theta_1,\theta_2)\ r^2\cos\theta_1 d\theta_1 d\theta_2$$

Lien avec le passage en shériques
Si g est intégrable sur $\mathbb{R}^3$, par le passage en coordonnées sphériques, on a en posant $\widetilde{g}(r,\theta_1,\theta_2) = g(x_1,x_2,x_3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} g dx = \int_{]0,+\infty[}(\int_{\mathbb{S}_r} g d\sigma_r)dr$$