COURS DE CALCUL INTEGRAL 7. B.Candelpergher
Espaces L^1 et L^2

1 Convergence au sens L^1.

Définition

Soit $L^1(A)$ muni de la norme $f \to ||f||_1 = \int_{\mathbb{R}} |f| \, dx$

On dit qu'une suite de fonctions (f_n) converge au sens L^1 si elle converge dans l'espace normé $(L^1(A), || \, ||_1)$ i.e. il existe $f \in L^1(A)$ telle que $||f_n - f||_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Soit (u_n) une suite dans $L^1(A)$, on dit que la série $\sum u_n$ est convergente au sens L^1, si elle converge dans l'espace normé $(L^1(A), || \, ||_1)$ i.e. il existe $f \in L^1(A)$ telle que $||(\sum_{k=0}^{n} u_k) - f||_1 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Remarque

Si (f_n) converge vers f dans l'espace normé $(L^1(A), || \, ||_1)$, alors

$$\int_A f_n \, dx \to \int_A f \, dx \text{ quand } n \to +\infty$$

La réciproque est fausse (prendre $A = \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{[0,1]}$ et $f = \chi_{[1,2]}$).

Thèorème

Soit (u_n) une suite dans $L^1(A)$, telle que la série numérique $\sum_n ||u_n||_1$ soit convergente, alors $\sum u_n$ est convergente dans l'espace normé $L^1(A)$. Donc toute série normalement convergente dans $L^1(A)$ est convergente dans $(L^1(A), || \, ||_1)$, ceci prouve que **l'espace normé $(L^1(A), || \, ||_1)$ est complet.**

Lien entre convergence presque partout et convergence L^1

Soit une suite (f_n) de fonctions mesurables et f une fonction mesurable, on va examiner le lien entre les deux notions:

▶ convergence presque partout:

$f_n \to f$ presque partout, c'est à dire $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in A \backslash N$ où $\lambda(N) = 0$.

▶ convergence L^1 :

$f_n \to f$ dans $(L^1(A), || \, ||_1)$, c'est à dire $||f_n - f||_1 \to 0$

La convergence L^1 n'implique pas la convergence presque partout.

Théorème de la suite extraite

Soit une suite (f_n) de fonctions mesurables, si $f_n \to f$ dans $(L^1(A), || \, ||_1)$ alors il existe une suite extraite (f_{n_k}) de la suite (f_n) telle que $f_{n_k} \to f$ presque partout sur A.

La convergence presque partout n'implique pas la convergence L^1.

Théorème de la convergence dominée

Si $f_n \to f$ presque partout et s'il existe $g \in L^1(A)$ tel que $|f_n| \leq g$ pour tout n, alors $f_n \to f$ dans $(L^1(A), || \, ||_1)$.

2 Convolution sur $\mathbb{R}$

Théorème et définition

Soient f et g deux fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$, la fonction

$$x \to f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) dy$$

est définie presque partour sur $\mathbb{R}$ et s'appelle le produit de convolution de f et g.

On a $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.

Le produit de convolution est commutatif, associatif

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

et l'application $(f, g) \to f * g$ est bilinéaire. La transformation de Fourier transforme produit de convolution en produit ordinaire:

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$$

Théorème

Soient f dans $L^1(\mathbb{R})$ et φ une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$, la fonction $f * g$

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \varphi(x-y) dy$$

est définie sur tout $\mathbb{R}$. Elle est continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Si φ est dérivable et si sa dérivée est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors $f * \varphi$ est dérivable, sa dérivée est continue et bornée sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\partial(\varphi * f) = (\partial \varphi) * f$$

Définition

On dit qu'une fonction φ est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$, si φ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.

On note $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$.

Exemple. La fonction φ définie par

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{(x-a)(b-x)}} \chi_{]a,b[}(x)$$

est $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

Théorème de régularité

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors la fonction $\varphi * f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\partial^n(\varphi * f) = (\partial^n \varphi) * f$$

On dit que le produit de convolution est **régularisant**.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1, 1]$ telle que telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi dx = 1.$$

Considérons la suite de fonctions (φ_n) définie par $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$
Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, les fonctions $\varphi_n * f$ forment une suite de fonctions dans $C^\infty(\mathbb{R})$ qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire

$$||\varphi_n * f - f||_1 \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est nulle en dehors d'un intervalle $[-M, M]$ alors la conclusion précédente est valable avec les $\varphi_n * f$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Théorème de densité

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace normé $(L^1(\mathbb{R}), || \ ||_1)$.

Application: Lemme de Riemann-Lebesgue Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur I. On a

$$\int_I e^{itx} f(x) dx \to 0 \text{ quand } t \to \pm\infty$$

3 L'espace des fonctions de carré intégrable

Définition

Soit A un ensemble mesurable dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$, on dit qu'une fonction mesurable f définie sur A et à valeurs dans $\mathbb{C}$, est de carré intégrable sur A si

$$\int_A |f|^2 dx < +\infty$$

On note $L^2(A)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur A, où l'on convient d'identifier deux fonctions égales presque partout sur A.

Théorème

$L^2(A)$ est un $\mathbb{C}$−espace vectoriel, muni du produit scalaire

$$(f|g) = \int_A \overline{f(x)} g(x) dx$$

La norme déduite de ce produit scalaire est appelée la norme L^2 et est notée

$$||f||_2 = (\int_A |f(x)|^2 dx)^{1/2}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz Si $f \in L^2(A)$ et $g \in L^2(A)$ on a

$$|\int_A \overline{f(x)} g(x) dx| \leq (\int_A |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_A |g(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

Remarque Si $f \in L^2(A)$ et $g \in L^2(A)$, la fonction $|fg|$ est intégrable sur A car

$$|fg| \leq 2|f||g| \leq |f|^2 + |g|^2$$

On en déduit donc que $fg \in L^1(A)$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $||fg||_1 \leq ||f||_2 ||g||_2$

Définition

Soit (f_n) une suite de fonctions qui sont dans $L^2(A)$, on dit que (f_n) converge au sens L^2,
si elle converge dans l'espace normé $(L^2(A), || \ ||_2)$
il existe $f \in L^2(A)$ telle que $||f_n - f||_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.
Soit (u_n) une suite de fonctions qui sont dans $L^2(A)$, on dit que la série $\sum u_n$ converge au sens L^2,
si elle converge dans l'espace normé $(L^2(A), || \ ||_2)$
il existe $f \in L^2(A)$ telle que $|| \sum_{k=0}^n u_k - f||_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Théorème

L'espace $L^2(A)$ muni de la norme $||f||_2 = (f|f)^{1/2}$ est complet, $L^2(A)$ est donc un espace de Hilbert.

Lien entre $L^1(A)$ et $L^2(A)$

Si A est de mesure finie toute fonction de carré intégrable sur A est intégrable sur A, ce que l'on résume en disant que l'on a $L^2(A) \subset L^1(A)$ et de plus

$$||f||_1 \leq \sqrt{\lambda(A)} ||f||_2$$

Cette inégalité permet de montrer que la convergence L^2 implique la convergence L^1, c'est à dire:
si (f_n) est une suite dans $(L^2(A), || \ ||_2)$ qui converge dans $L^2(A)$, c'est à dire telle qu'il existe $f \in L^2(A)$ telle que $||f_n - f||_2 \to 0$ alors on a $f \in L^1(A)$ et $||f_n - f||_1 \to 0$, donc (f_n) est une suite dans $L^1(A)$ qui converge vers f dans $(L^1(A), || \ ||_1)$.

Théorème de la convergence dominée dans L^2

Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^2(A)$, qui converge simplement sur A vers une fonction f .

S'il existe $g \in L^2(A)$ telle que pour tout n on a $|f_n| \leq g$, alors $f \in L^2(A)$ et $||f_n - f||_2 \to 0$ quand $n \to \infty$.

4 Séries de Fourier

Densité des polynômes trigonométriques

Soit F l'espace des "polynômes trigonométriques", c'est à dire le sous-espace F de $\mathcal{C}([0,1])$ formé par les combinaisons linéaires finies d'exponentielles du type

$$x \to e^{2i\pi nx} \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

F est dense dans $L^2([0,1])$

Théorème

Soit l'espace $L^2(]0,1[)$ avec le produit scalaire hermitien

$$(f|g) = \int_{]0,1[} \overline{f(x)}g(x)dx$$

Les fonctions $e_n : x \to e^{2i\pi x}, n \in \mathbb{Z}$, forment une base hilbertienne de $L^2(]0,1[)$. On a pour toute fonction $f \in L^2(]0,1[)$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (e_n|f)e_n$$

c'est à dire

$$|| \sum_{n=-N}^{+N} (e_n|f)e_n - f||_2 \to 0 \text{ quand } N \to +\infty$$

L'espace $l^2(\mathbb{Z})$.

On dit qu'une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ si la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ est convergente, c'est à dire si

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \text{ existe (est finie)}$$

on note $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$ cette limite. Les opérations habituelles de somme et produit par un scalaire font de $l^2(\mathbb{Z})$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On définit sur $l^2(\mathbb{Z})$ un produit scalaire en posant

$$((c_n)|(d_n)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n} d_n$$

ce qui permet de définir la norme

$$||(c_n)||_2 = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2)^{1/2}$$

Muni de ce produit scalaire, $l^2(\mathbb{Z})$ un espace de Hilbert.

Théorème

Si $f \in L^2(]0,1[)$ alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ de ses coefficients de Fourier est dans $l^2(\mathbb{Z})$ et on a la **relation de Parseval**

$$||(c_n(f))||_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = ||f||_2^2$$

qui peut aussi se traduire par:

pour tous f et g dans $L^2(]0,1[)$ on a $((c_n(f))|(c_n(g))) = (f|g)$

Théorème d'isomorphisme de Riesz

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_p \ &: \ L^2(]0,1[) \to l^2(\mathbb{Z}) \\ &: \ f \to (c_n(f)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme qui conserve les produits scalaires. (L'indice p signifiant *périodique*)

4.1 Convergence ponctuelle

On va maintenant considérer la décomposition d'une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ (ou de sa restiction à $[0,1[$), en série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nx}$ où cette série est considérée comme une série de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

Définition

Si f est une fonction définie et intégrable sur $]0,1[$, les intégrales $\int_{]0,1[} e^{-2i\pi nx} f(x)dx$ ont un sens car

$$|e^{-2i\pi nx} f(x)| = |f(x)|$$

On appelle **coefficients de Fourier** de f les

$$c_n(f) = \int_{]0,1[} e^{-2i\pi nx} f(x)dx$$

La donnée des coefficients de Fourier de f détermine f presque partout, c'est la propriété suivante.

Propriété d'injectivité

Deux fonctions de $L^1(]0,1[)$ qui ont les mêmes coefficients de Fourier sont presque partout égales.

Définition

Nous appellerons **série de Fourier** de f la suite des sommes partielles

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{+N} c_n(f)e^{2i\pi nx}$$

considérée comme suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

La **convergence ponctuelle** en un point x_0 de $[0,1[$ de la série de Fourier de f, consiste à voir si $S_N(f)(x_0) \to f(x_0)$ quand $N \to \infty$.

Lemme de Dirichlet

Si f (périodique de période 1) est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, c'est à dire si f est C^1 sauf en un nombre fini de points où les limites à droite et à gauche de f et f' existent. Soit $f(x_0+)$ la limite à droite de f en x_0 et $f(x_0-)$ sa limite à gauche en x_0, on a alors

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{2i\pi nx_0}$$

5 Espaces L^p

Dans ce paragraphe on va introduire une généralisation des espaces $L^1(A)$ et $L^2(A)$, ce sont les espaces $L^p(A)$ définis pour tout $p \geq 1$, dont on donnera, sans démonstration, les propriétés essentielles.

Définition

Soit $p \geq 1$, on définit $L^p(A)$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout, des fonctions mesurables f telles que

$$\int_A |f(x)|^p dx < +\infty$$

Propriétés

$\star L^p(A)$ est un espace vectoriel (pour les opérations habituelles de somme et produit par un scalaire, sur les fonctions)

$\star$L'application $f \to ||f||_p = (\int_E |f|^p dx)^{1/p}$ est une norme sur $L^p(A)$, et cet espace normé est complet.

$\star$De toute suite convergente dans $L^p(A)$ on peut extraire une sous-suite qui converge presque partout sur A.

$\star$Si $\lambda(A) < +\infty$, on a les inclusions

$$L^q(A) \subset L^p(A) \text{ si } q > p$$

Convergence dominée

Le théorème de la convergence dominée est vrai dans L^p, on a:

Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(A)$, qui converge simplement sur A vers une fontion f . S'il existe $g \in L^p(A)$ telle que pour tout n on a $|f_n| \leq g$, alors $f \in L^p(A)$ et $||f_n - f||_p \to 0$ quand $n \to +\infty$.

L'inégalité de Hölder

Soient $f \in L^p(A)$ et $g \in L^q(A)$ avec $p > 1$, $q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a l'inégalité de Hölder:

$$||fg||_1 \leq ||f||_p||g||_q$$

Conséquence

Soient $p > 1$ et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $g \in L^q(A)$, la forme linéaire

$$f \to \int_E fgdx$$

est continue sur $L^p(A)$.

On peut montrer que toute forme linéaire continue sur $L^p(A)$ est de ce type, ce qui permet d'avoir un isomorphisme entre $L^q(A)$ et le dual de $L^p(A)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur $L^p(A)$.

En particulier toute forme linéaire continue sur $L^2(A)$ est du type

$$f \to \int_E fgdx$$

où $g \in L^2(A)$. En posant $h = \overline{g}$ on retrouve le fait que toute forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert $L^2(A)$ s'écrit $f \to (h|f)$.

Sous-espaces denses

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On va introduire quelques sous-espaces denses de $(L^p(I), || \, ||_p)$.

Densité des fonctions en escalier

Rappelons que l'on appelle fonction en escalier sur I toute combinaison linéaire (finie) de fonctions du type χ_J où J est un intervalle borné inclus dans I.

L'espace des fonctions en escalier sur I est un sous-espace dense de $L^p(I)$.

Densité des fonctions continues à support compact

L'espace $\mathcal{C}_c(I)$ des fonctions continues à support compact dans I est un sous-espace dense de $L^p(I)$.

Théorème de densité

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace normé $(L^p(\mathbb{R}), || \, ||_p)$.

Définition

On définit $L^\infty(A)$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout, des fonctions mesurables f telles que

$$\text{il existe M tel que } \||f(x)| \leq M \text{ presque partout}$$

Propriétés

$\star$ $L^\infty(A)$ est un espace vectoriel (pour les opérations habituelles de somme et produit par un scalaire, sur les fonctions)

$\star$ L'application

$$f \to ||f||_\infty = inf\{M|\||f(x)| \leq M \text{ presque partout}\}$$

est une norme sur $L^\infty(A)$, et cet espace normé est complet.

$\star$ Soit $g \in L^\infty(A)$, la forme linéaire

$$f \to \int_E fgdx$$

est continue sur $L^1(A)$.

On peut montrer que toute forme linéaire continue sur $L^1(A)$ est de ce type, ce qui permet d'avoir un isomorphisme entre $L^\infty(A)$ et le dual de $L^1(A)$.