L3 intégration 2009-10

Un corrigé de l'exercice 14 de la feuille 2. [1]

On pose $\phi(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$.

1. Bien défini ?

Pour chaque réel x, $\phi(x)$ est une intégrale impropre : l'application $y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et se prolonge par continuité en 0.

Pour tout $y > 0$ on a $|\mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}| \leq \mathrm{e}^{-xy}$ donc l'intégrale $\phi(x)$ est absolument convergente si $x > 0$.

Au passage soit $a > 0$; la famille d'applications $\big(y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}\big)_{x \geq a}$ est dominée par l'application $y \mapsto \mathrm{e}^{-ay}$ laquelle est intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour $y > 0$ fixé l'application $x \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}$ est continue. Le théorème de convergence dominée montre alors que ϕ est continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Comme on peut prendre pour a tout réel strict^{t} positif, on obtient que ϕ est continue sur $]0, +\infty[$.

Si $x = 0$, $\phi(x)$ est l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$. Elle n'est pas absolument convergente car pour tout entier $k \geq 0$ on a $|\frac{\sin(y)}{y}| \geq \frac{1}{2y}$ sur l'intervalle $[2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}]$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(y)|}{y} \mathrm{d}y \geq \sum_{k \geq 1} \int_{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}^{2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} \frac{|\sin(y)|}{y} \mathrm{d}y \geq \sum_{k \geq 1} \frac{2\pi}{3} \frac{1}{2(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} = +\infty$$

L'intégrale $\phi(0)$ est cependant convergente ("semi-convergente") comme le montre l'intégration par parties

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y = \left[\frac{-\cos(y)}{y}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(y)}{y^2} \mathrm{d}y \ .$$

(Attention : cette intégration par parties sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donnerait deux termes divergents ! On aurait des termes convergents en prenant $y \mapsto 1 - \cos(y)$ comme primitive de $y \mapsto \sin(y)$ mais il est plus simple de couper en deux le domaine d'intégration comme nous l'avons fait.)

Pour $x < 0$ l'intégrale $\phi(x)$ n'est pas convergente car

$$\int_{2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}^{2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}} \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y \geq \frac{2\pi}{3} \mathrm{e}^{-x(2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})} \frac{1}{2} \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}$$

et le teme de droite tend vers $+\infty$ quand $k \to +\infty$, donc le critère de Cauchy n'est pas vérifié.

2. Continuité de ϕ en 0

La famille d'applications $\big(y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}\big)_{x \geq 0}$ n'est pas dominée par une application intégrable sur $]0, +\infty[$ au voisinage de $x = 0$, $x \geq 0$, car la limite simple quand $x \to 0$ de cette famille d'applications est $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ laquelle n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

On se ramène à une situation de convergence dominée en découpant le domaine d'intégration en deux : $[0, +\infty[= [0, 1] \cup [1, +\infty[$. Sur le premier intervalle il y a convergence dominée pour x voisin de 0 puisque l'application $(x, y) \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}$ est bornée sur $[0, 1] \times [0, 1]$.

Sur le second intervalle on fait une intégration par parties analogue à celle montrant que l'intégrale impropre $\phi(0)$ est convergente. On a besoin d'un controle sur une primitive F_x de l'application $y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \sin(y)$ (on voudrait savoir qu'elle est bornée sur $[1, +\infty[$).

On peut donner une expression pour F_x en observant que $\mathrm{e}^{-xy} \sin(y)$ est la partie imaginaire de l'exponentielle complexe $\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})y}$ donc on peut prendre pour F_x la partie imaginaire de $\frac{1}{-x+\mathrm{i}} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})y} = \frac{-x-i}{x^2+1} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})y}$ soit

$$F_x(y) = -\frac{x}{x^2+1} \mathrm{e}^{-xy} \sin(y) - \frac{1}{x^2+1} \mathrm{e}^{-xy} \cos(y) \ .$$

On a pour $x, y \geq 0$, $|F_x(y)| \leq 2$

[1] `~/tex/L3int/corr-f2ex14.tex`, 27 oct. 2009, dehon@unice.fr

Pour $x \geq 0$ l'intégration par parties en question donne

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y = \left[y \mapsto F_x(y) \frac{1}{y} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} F_x(y) \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y = -F_x(1) + \int_1^{+\infty} F_x(y) \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y \ .$$

On observe que la famille d'applications $\left(y \mapsto F_x(y) \frac{1}{y^2}\right)_{x \geq 0}$ est dominée par $y \mapsto \frac{2}{y^2}$ laquelle est intégrable sur $[1, +\infty[$. Pour $y \geq 1$ fixé l'application $x \mapsto F_x(y) \frac{1}{y^2}$ est continue. Le théorème de convergence dominé implique que l'intégrale $\int_1^{+\infty} F_x(y) \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y$ tend vers $\int_1^{+\infty} F_0(y) \frac{1}{y^2} \mathrm{d}y$ quand $x \to 0$, $x \geq 0$.

Comme $F_x(1)$ tend vers $F_0(1)$ quand $x \to 0$, on obtient que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$ tend vers $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$ quand $x \to 0$.

Par ailleurs la famille d'applications $\left(y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}\right)_{x \geq 0}$ est dominée par l'application $y \mapsto 1$, laquelle est intégrable sur $[0, 1]$ (mais pas sur $[0, +\infty[$!) et tend simplement vers l'application $y \mapsto \frac{\sin(y)}{y}$ quand $x \to 0$, donc l'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$ tend vers $\int_0^1 \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$ quand $x \to 0$.

En sommant les deux morceaux on obtient que $\phi(x)$ tend vers $\phi(0)$ quand $x \to 0$.

3. Expression pour $\phi(x)$, calul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y$

On peut montrer que ϕ est dérivable en tout point x de $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée $\phi'(x)$ avec le théorème de dérivation de Lebesgue : Soit $a > 0$; la famille d'applications $\left(y \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{e}^{-xy} \frac{\sin(y)}{y}\right)_{x \geq a}$ est dominée par l'appliation $y \mapsto \mathrm{e}^{-ay}$ laquelle est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit que ϕ est dérivable sur $]a, +\infty[$ de dérivée $\phi'(x) = \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xy} \sin(y) \mathrm{d}y$.

On a déjà exhibé la primitive $y \mapsto F_x(y)$ de l'application $y \mapsto \mathrm{e}^{-xy} \sin(y)$. On obtient pour $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xy} \sin(y) \mathrm{d}y = \left[y \mapsto -F_x(y) \right]_0^{+\infty} = F_x(0) = -\frac{1}{x^2 + 1} \ .$$

On reconnaît la dérivée de l'application $x \mapsto -\arctan(x)$, donc l'application ϕ diffère de l'application $x \mapsto -\arctan(x)$ d'une constante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ (Pour écrire $[0, +\infty[$ au lieu de $]0, +\infty[$ on utilise le fait que ϕ est continue en 0). Le théorème de convergence dominée (toujours lui) montre que $\phi(x)$ tend, quand $x \to +\infty$, vers l'intégrale sur $]0, +\infty[$ de la fonction nulle. Or $\arctan(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$ donc $\phi(x) + \arctan(x)$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$. On en déduit $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ pour $x \geq 0$; en particulier $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$.

On a obtenu

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \ .$$