Interrogation du 25 novembre 2009

durée 1H – Calculatrice et documents interdits

Question 1. Soit V une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables $V \to \mathbb{R}$. Sous quelle(s) condition(s) peut-on écrire

$$\int_V \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\Big) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_V f_n(x) d\mu(x)\Big) \quad ?$$

($\int_V f(x) d\mu(x)$ est une notation désignant l'intégrale de Lebesgue de f sur V.)

Question 2. Enoncez la formule de changement de variables avec les hypothèses précises pour l'intégrale d'une fonction mesurable f sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$.

Si f est seulement définie sur une partie mesurable A de V, comment peut-on se ramener à l'énoncé que vous donnez ?

Question 3. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction mesurable par rapport à la seconde variable. Enoncez le théorème de dérivabilité sur I de la fonction $t \mapsto \int_V f(t, x) d\mu(x)$. (Pour t fixé, $\int_V f(t, x) d\mu(x)$ désigne l'intégrale de Lebesgue de la fonction $x \mapsto f(t, x)$ sur V.)

Exercice 4. Soit ϕ l'application $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{e}^{-xt} dt$. Calculez en justifiant chaque étape $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)$ et la dérivée $\phi'(x)$ pour $x > 0$. En déduire une expression de $\phi(x)$ avec les fonctions usuelles.

Exercice 5. Soit V l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > y > 0 \text{ et } xy < 1\}$. Montrez que $(u, v) = (xy, x - y)$ définit un changement de variables $V \to W$ pour un ouvert W de $\mathbb{R}^2$ à expliciter. Utilisez ce changement de variable pour calculer

$$\int_V \frac{x + y}{1 + (xy)^2} \mathrm{e}^{y-x} dx dy \ .$$

(Justifiez chaque étape du calcul.)

Q1 L'égalité est vraie si les f_n sont positives. Dans le cas générale l'égalité est vraie si $\int_V \big(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|(x)\big) d\mu(x) < \infty$ ou si $\sum_{n=0}^{\infty} \big(\int_V |f_n|\big) < \infty$

Q2 Soit φ un C^1-difféomorphisme d'un ouvert W de $\mathbb{R}^n$ dans V. Si f est positive alors $\int_V f(x) d\mu(x) = \int_W f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)| d\mu(y)$

Pour f quelconque, f est intégrable sur V ssi $y \mapsto f(\varphi(y)) |\det d\varphi(y)|$ est intégrable sur W auquel cas on a l'égalité ci-dessus.

Q2 Si f est seulement définie sur une partie mesurable $A \subset V$ on prolonge f à V entier par la fonction nulle sur $V \setminus A$. On note abusivement ~~χ_V~~ $x \mapsto \chi_V(x) f(x)$ ce prolongement (il faudrait le noter $\bar{f}$ ou $\chi_V \cdot \bar{f}$). Alors $\chi_V f$ est mesurable sur V, $\int_V \chi_V(x) f(x) d\mu(x) = \int_A f(x) d\mu(x)$ et on peut appliquer la formule ci-dessus à ~~f~~ $\chi_V \cdot f$

Q3 On suppose que $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur V pour tout $t \in I$.

On suppose que pour tout $x \in V$, $t \mapsto f(t, x)$ est dérivable sur I et que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ est dominée pour tout $t \in I$ par une fonction intégrable $g : V \to \mathbb{R}$ ne dépendant pas de t

Alors $t \mapsto \int_V f(t, x) d\mu(x)$ est dérivable sur I de dérivée $t \mapsto \int_V \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x)$

Ex 4 Soit $a>0$. L'application $t\mapsto \frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ est dominée sur $]0,+\infty[$ par $t\mapsto e^{-at}$ dès que $x\geq a$. Or
$$\int_0^{+\infty} e^{-at}\,dt = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{-e^{-at}}{a}\right]_0^b<\infty.$$

Pour tout $t>0$, $\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}$ tend vers 0 qd $x\to+\infty$ donc par le thm de cvgce dominée $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\,dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0$

Soit $a>0$. L'application $t\mapsto \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(t)}{t}e^{-xt}\right) = -\sin(t)e^{-xt}$ est dominée sur $]0,+\infty[$ par $t\mapsto e^{-at}$ dès que $x\geq a$.

Par le théorème de dérivation l'application ϕ est dérivable sur $]a,+\infty[$ de dérivée $\phi'(x)=\int_0^{+\infty}-\sin(t)e^{-xt}\,dt$. On peut choisir $a>0$ quelconque

on obtient que ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée $\phi'(x)=\int_0^{+\infty}-\sin(t)e^{-xt}\,dt$

On peut calculer ϕ' en écrivant $\sin(t)e^{-xt} = Im(e^{-xt+it}) = Im(e^{(-x+i)t})$ (partie imaginaire d'un nombre complexe)

Alors $t\mapsto Im\left(\frac{1}{-x+i}e^{(-x+i)t}\right) = Im\left(\frac{-x-i}{x^2+1}e^{(-x+i)t}\right) = \frac{-\cos t - x\sin(t)}{x^2+1}e^{-xt}$ est une primitive de $t\mapsto \sin(t)e^{-xt}$ donc pour $x>0$

$\phi'(x) = -\frac{\cos(0)-x\sin(0)}{x^2+1} = -\frac{1}{x^2+1}$. On en déduit $\phi(x) = -\arctan(x)+cste$.

$\lim_{x\to+\infty}(-\arctan(x)+cste) = -\frac{\pi}{2}+cste$ et $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ donc $cste=\frac{\pi}{2}$ et $\phi(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$

Ex 5 Posons $\Psi(x,y)=(xy,x-y)$. Ψ est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et la matrice de $d\Psi(x,y)$ dans la base canonique est

$\begin{pmatrix} y & x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ de déterminant $-(x+y)$ lequel ne s'annule pas sur V donc Ψ est un C^1-difféomorphisme local sur V

Montrons que $\Psi|_V$ est injective et déterminons $\Psi(V)$:
$$\begin{cases} xy=u\\ x-y=v\\ x>y>0\\ xy<1\end{cases} \iff \begin{cases} v>0,\ 0<u<1\\ y>0\\ x-y=v\\ (x+y)^2=(x-y)^2+4xy=v^2+4u\end{cases} \iff \begin{cases} v>0,\ 0<u<1\\ y>0\\ x-y=v\\ x+y=\sqrt{v^2+4u}\end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} v>0,\ 0<u<1\\ x=\frac{1}{2}\left(v+\sqrt{v^2+4u}\right)\\ y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{v^2+4u}-v\right)\end{cases}$$

Conclusion $\Psi(V)=]0,1[\times]0,+\infty[$ et tout couple $(u,v)\in\Psi(V)$ a exactement un antécédent par Ψ dans V

Ψ est bijective $V\to]0,1[\times]0,+\infty[$ et Ψ est un C^1-difféo. local donc Ψ est un C^1-difféomorphisme $V\to]0,1[\times]0,+\infty[$ par le thm d'inversion globale.

Notons φ la fonction réciproque de Ψ. On a $d\varphi(u,v)=\left(d\Psi(\varphi(u,v))\right)^{-1}$ donc $\det d\varphi_{(u,v)} = \frac{1}{\det d\Psi(\varphi(u,v))} = -\frac{1}{x+y} = \frac{-1}{\sqrt{v^2+4u}}$

où on a noté $(x,y)=\varphi(u,v)$

La formule de chgt de variable donne
$$\int_V \frac{x+y}{1+(xy)^2}e^{y-x}\,dx\,dy = \int_{]0,1[\times]0,+\infty[}\frac{\sqrt{v^2+4u}}{1+u^2}e^{-v}\left|\frac{-1}{\sqrt{v^2+4u}}\right|du\,dv$$
$$= \int_0^1\frac{du}{1+u^2}\times\int_0^{+\infty}e^{-v}\,dv$$ par le thm de Fubini (on intègre une fct ≥ 0)
$$= [\arctan u]_0^1\times[-e^{-v}]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$