Calcul Integral Feuille d'exercices 0

1)a)En utilisant la formule de dérivation d'une composée

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

en déduire la formule donnant la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} d'une fonction $f : I \to J$, bijective dérivable et telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

b)Calculer la dérivée de la fonction $Argsh = sh^{-1}$, en déduire une formule explicite de l'intégrale

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+2}}dt$$

2)Soit $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$, montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$. Montrer que f tend vers une limite finie quand $x \to +\infty$.

3)Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \int_0^{x^2} f(t)dt$.

4)a)Donner une formule explicite pour $\int_0^x e^{-t}\sin(t)dt$ en écrivant $\sin(t) = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$.

b)En faisant un changement de variable montrer que $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt$. En déduire une formule liant $Arctg(x)$et $Arctg(1/x)$ pour x réel non nul.

5)a)Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^{2n} - 1$. En déduire que pour tout $x > 0$, $x \neq 1$, on a

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$$

b)En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} Log(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$

c)Donner une formule explicite en fonction de x avec $x \neq 1$ pour

$$J(x) = \int_0^\pi Log(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$$

on distinguera $0 < x < 1$ et $x > 1$.

6)En intégrant par parties montrer que si $x > 0$ on a

$$\int_a^x Log(t)dt = (xLog(x) - x) - (aLog(a) - a)$$

L'intégrale $\int_0^1 Log(t)dt$ est-elle convergente?

7)En intégrant par parties donner une formule explicite pour $\int_0^x \mathrm{Arcsin}(t)dt$ où $x \in]-1, 1[$.

8)Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} Arctg(x)dx$, $\int_1^{+\infty} Arctg(1/x)dx$,

9)a)L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$ est-elle convergente?

b)En intégrant par parties $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt$.

10)Déterminer pour $\alpha = -2, -1, 1$, la nature de $\int_1^{+\infty} t^\alpha \sin(t)dt$