# Calcul Integral Licence de Mathématiques Feuille 1

0)A l'aide du théorème de la convergence monotone , calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)(1+nx)}dx$

1)a)Déterminer la nature de l' intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

b)Déterminer la nature de l' intégrale impropre $\int_0^1 \frac{x\sin(\frac{1}{x})}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

c)Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x-1}dx$ est convergente et qu'elle est égale à $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

2)Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $I=]0,+\infty[$ par:

$$f_n(x)=\frac{\cos(x)}{(x+1)\sqrt{x}}e^{-n\sin^2 x}$$

a)Cette suite est-elle uniformément convergente sur $I$?

b)Les fonctions $f_n$ sont-elles intégrables (au sens de Lebesgue) sur $I$?

c)Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx$.

3)Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x+e^x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a_n}{(n+1)^{n+1}}$ où les $a_n$ sont des entiers que l'on déterminera (on utilisera que $xe^{-x}\leq 1/e$ pour tout $x>0$).

4)Déterminer la nature des intégrales $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x}dx$ , $\int_0^{+\infty}e^{-2Log^2(x)}dx$

5)Pour tout $n\in N$ on pose $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin(x))^{2n}dx$.

a) Montrer que $I_n=\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$ (écrire $(\sin(x))^{2n}=(\sin(x))^{2n-1}\sin(x)$). En déduire que $I_n=C\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ où $C$ est une constante que l'on déterminera.

b)Calculer , en posant le changement de variable $u=tg(x)$, l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1-\frac{\sin^2(x)}{2}}dx$. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{3n}(n!)^2}$.

6)Soit $n$ un entier positif, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$ est convergente. Calculer

$$lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n^2xe^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$$