Calcul Integral Feuille d'exercices 2

1. Soit F la fonction définie sur [-1,+1] par: $F(x) = x^2\sin(1/x^2)$ si $x \neq 0$, $F(0) = 0$.

   a)Montrer que F est dérivable sur [-1,+1]. On pose $F' = f$.

   b)L'intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est-elle une intégrale impropre convergente?

2. a)Soit f une fonction continue sur [a,b], positive sur [a,b], et g une fonction continue sur [a,b]. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que:

   $$\int_a^b f(t)g(t)dt = g(\theta)\int_a^b f(t)dt \text{ ....(première formule de la moyenne)}$$

   b)Soit f une fonction continûment dérivable sur [a,b],positive décroissante sur [a,b], et g une fonction continue sur [a,b]. Montrer qu'il existe $\theta \in [a,b]$ tel que:

   $$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^\theta g(t)dt \text{ ....(deuxième formule de la moyenne)}$$

   (utiliser G la primitive primitive de g nulle en a et faire une intégration par parties)

   c)Montrer que si $0 < x < y$ on a: $|\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}dt| \leq \frac{2}{x}$

3. La dérivée de la fonction $x \to x^2\sin(1/x^2)$ est-elle intégrable sur [0,1]?

4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

   Montrer que f' est mesurable. Est-ce que f' est continue?

5. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-x}Log(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n Log(x)dx$

6. Peut-on appliquer le théorème de la convergence dominée à la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par: $f_n(x) = \chi_{[0,n]}\frac{x^n}{n^n}$?

7. Soit f la fonction définie sur [0,1] par: $f(x) = \frac{1}{x} - [\frac{1}{x}]$ si $x \neq 0, f(0) = 0$ ([a]=partie entière de a)

   Montrer que f est intégrable sur [0,1] et calculer $\int_{]0,1[} f(x)dx$.

8. Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1(\sin(\pi x))^n dx$.

9. La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\chi_{[0,n]}$ est-elle intégrable?

10. Est-ce que $\sum_{n\geq 1}\int_{[0,1]}\partial(x^n - x^{n+1})dx = \int_{[0,1]}\sum_{n\geq 1}\partial(x^n - x^{n+1})dx$?

11. La série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2(|x-\frac{1}{n}|)^{1/2}}$ définit-elle un élément de $L^1([0,1])$?

12. Montrer que la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par: $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{ixy}\frac{e^{-y}}{\sqrt{y}}dy$ est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.

13. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^{-x^2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\sin(2xy)dy$

14. On considère la fonction ϕ définie sur $[0,+\infty[$ par: $\phi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin(y)}{y}dy$

    a)Calculer $\lim_{x\to+\infty}\phi(x)$

    b)Montrer que ϕ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

    c)En déduire que pour $x > 0$ on a: $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - Arctg(x)$. Est-ce que f a une limite quand $x \to 0_+$? La fonction ϕ est-elle continue en 0?