Calcul intégral Feuille d'exercices 4

Décembre 97

1. Est-ce que la fonction $f : x \rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-nx} - 2e^{-2nx}) \in L^1(]0, +\infty[)$? Est-ce que

$$\int_{]0,+\infty[} f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{]0,+\infty[} (e^{-nx} - 2e^{-2nx})dx$$

2. Construire une suite de fonctions $f_n \in L^1(]0, 1[)$ telle que (f_n) converge vers 0 dans $(L^1, || \ ||_1)$ mais $(f_n(x))$ ne converge en aucun point $x \in]0, 1[$

3. Construire une suite de fonctions $f_n \in L^1(]0, 1[)$ telle que (f_n) converge presque sûrement mais (f_n) ne converge pas dans $(L^1, || \ ||_1)$

4. Soit I un intervalle examiner les inclusions possibles entre $L^1(I)$ et $L^2(I)$

5. a)Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^1(A)$ qui converge presque partout vers une fonction f. Montrer que s'il existe $g \in L^1(A)$ telle que $f_n \rightarrow g$ dans $(L^1(A), || \ ||_1)$ alors $g = f$ presque partout.

   b)Soit $\sum u_n$ une série de fonctions dans $L^1(A)$ qui converge presque partout. Montrer que si cette série converge dans $(L^1(A), || \ ||_1)$ si et seulement si $|| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k||_1 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

   c)Examiner la convergence de la suite de fonctions $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$ dans $(L^1(I), || \ ||_1)$ et $(L^2(I), || \ ||_2)$ pour $I = [0, +\infty[$

d)Examiner la convergence de la suite de fonctions $f_n = \sqrt{n}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ dans $(L^1(I), || \ ||_1)$ et $(L^2(I), || \ ||_2)$ pour $I = [0, 1]$

6. Prouver qu'un espace normé $(E, || \ ||)$ est complet si et seulement si toute série normalement convergente est convergente.

En déduire que l'espace des fonctions continues par morceaux sur $]0, 1[$ considéré comme sous-espace de $L^1(]0, 1[)$ n'est pas complet (On rappelle que f est continue par morceaux sur $]0, 1[$ si il existe une subdivision **finie** $t_0 = 0 < t_1 < ... < t_n = 1$ tels que f est continue sur tout $]t_i, t_{i+1}[$ et possède une limite à gauche finie en t_{i+1} et une limite à droite finie en t_i)

7. Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles de $L^2(A)$ qui converge simplement sur A vers une fontion f . On suppose qu'il existe $g \in L^2(A)$ telle que pour tout n $|f_n| \leq g$. Montrer que $f \in L^2(A)$ et que $||f_n - f||_2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

8. Si f et g sont deux fonctions de $L^2([0, 1])$ on pose

$$f * g(x) = \int_{[0,1]} f(x - z)g(z)dz$$

   montrer que l'on a

$$c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$$

   (où $c_n(h)$ désigne le $n$ième coefficient de fourier de h)

9. Montrer que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ on a $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f.g dx = \int_{\mathbb{R}} f.\mathcal{F}g dx$.

10. Calculer les transformées de Fourier des fonctions

    $f(x) = \chi_{[0,+\infty[}(x)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{1}{(1+2i\pi x)^2}$

11. Soit f_a la fonction $f_a(x) = \frac{1}{a}e^{-\pi\frac{x^2}{a^2}}$ Calculer $f_a * f_b$ $a > 0, b > 0$ en passant par les transformées de Fourier

12. Soit $a > 0$ calculer directement $\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]}$

    Calculer $\mathcal{F}(\chi_{[-a,a]} * \chi_{[-a,a]})$. En déduire la transformée de Fourier de $x \to \frac{\sin^2(x)}{x^2}$

13. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} \partial_y u &= \partial^2_{xx} u \ , x \in \mathbb{R}, y > 0 \\ u(0,x) &= f(x) \end{aligned}$$

    Soit v la transformée de Fourier de $x \to u(y,x)$. Montrer que v est solution d'une équation differentielle. En déduire u et justifier les calculs précédents.