M2 Math – Topologie algébrique – 2009-10

Feuille d'exercices 1 : morphismes entre groupes abéliens, explicitation du complexes de chaînes, triangulations

1. Un rétract d'un homomorphisme $i : A \to B$ entre groupes abéliens est un homomorphisme $r : B \to A$ tel que la composée $r \circ i$ est l'identité de A. Montrer que si i admet un rétract r alors l'homomorphisme $A \oplus \ker(r) \xrightarrow{(i,\mathrm{incl})} B$ est un isomorphisme. Montrer que le conoyau de i s'identifie à $\ker(r)$.

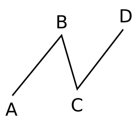
Si i admet un retract on dit que A est un facteur direct de B (via i).

Soit $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ l'homomorphisme donné par $i(1) = (4, 3)$. Admet-il un rétract ? Même question avec $i(1) = (4, -6)$.

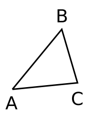
2. Utiliser la normalisation de Smith pour décrire le groupe quotient $\mathbb{Z} \otimes \{e, f\}/4e \sim 6f$: on regarde ce groupe quotient comme le conoyau de l'homomorphisme $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \otimes \{e, f\}$, $1 \mapsto 4e - 6f$. On cherche une nouvelle base $\{a, b\}$ du groupe abélien libre $\mathbb{Z} \otimes \{e, f\}$ telle que $\mathrm{im}(i)$ soit le sous-groupe engendré par λa pour un certain entier λ.

3. Décrire le conoyau de l'homomorphisme $\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Décrire le complexe de chaînes puis l'homologie du complexe simplicial représenté ci-dessous



5. Même question avec le complexe simplicial $\partial\triangle_{\{A,B,C\}}$



6. Donner une représentation du cylindre $\mathrm{S}^1 \times [0, 1]$ et du ruban de Moebius comme sous-variétés à bord de $\mathbb{R}^3$.

Montrer que comme espace topologique, le cylindre est homéomorphe au quotient $[0, 1] \times [0, 1]/(0, x) \sim (1, x)$ et que le ruban de Moebius est homéomorphe au quotient $[0, 1] \times [0, 1]/(0, x) \sim (1, 1 - x)$.

Donner une triangulation (par morceaux) du cylindre et une triangulation du ruban de Moebius.

7. Soit K un complexe simplicial abstrait. On choisit un élément w n'appartenant pas à l'ensemble des sommets de K. Le cone de K, noté wK, est le complexe simplicial abstrait formé des ensembles $\sigma \sqcup \{w\}$, σ décrivant les simplexes de K, et de leurs parties non vides. K est un sous-complexe simplicial de wK.

Montrer que si $(K, f : |K| \to \mathrm{S}^1)$ est une triangulation du cercle alors f se prolonge en un homéomorphisme de $|wK|$ sur le disque D^2.

8. Former un ruban de Moebius avec une bande de papier et couper le par le milieu de la bande. Qu'obtient-on ? En déduire que l'espace quotient $\mathrm{S}^1 \times [0, 1]/(z, 1) \sim (-z, 1)$ est homéomorphe au ruban de Moebius.

Le plan projectif réel $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ est le quotient $\mathrm{S}^2/x \sim -x$, où S^2 est la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. Déduire de ce qui précède que $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant sur un ruban de Moebius un disque le long du bord.

En formule :

$$\mathrm{P}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{D}^2 \cup_{\mathrm{S}^1 \times \{0\}} \Big(\mathrm{S}^1 \times [0, 1]/(z, 1) \sim (-z, 1)\Big)$$

En déduire une triangulation (par morceaux) de $\mathrm{P}_2(\mathbb{R})$.